

Guía Práctica de Matemáticas VII

Segunda Parte

Samuel Alonso
GECOUSB
14-10028@usb.ve

Buenos Aires, Febrero de 2021

Prólogo

Continuando con el trabajo de la primera parte, la presente guía aspira a servir como una referencia práctica para la segunda mitad del curso de Matemáticas VII. Habiendo aprendido sobre derivadas generalizadas, convolución y transformadas de Laplace, es momento de explorar algunas de las aplicaciones de sus nuevas herramientas, así como aprender sobre nuevos y poderosos métodos matemáticos. Éstos, junto a aquellos desarrollados en la primera mitad del curso, dan un cierre espectacular a muchos de los conceptos que, a primera vista, se enseñan aparentemente sin relevancia alguna; en los ejercicios que siguen experimentará de primera mano como nada podría alejarse más de la realidad. A lo largo de la asignatura (y la guía) tendrá numerosas oportunidades para apreciar la tangible utilidad del material y el verdadero alcance del contenido. Con un poco de esfuerzo, y desempolvando sus conocimientos de Matemáticas III, IV y VI para algunos cálculos auxiliares, podrá constatar el poder que le otorga Matemáticas VII.

Nuevamente es mi deber recordarle, así como lo hice en la primera parte, que Matemáticas VII requiere de especial atención a los conceptos teóricos que sustentan su práctica. Tomarán un protagonismo cada vez mayor, especialmente (y quizás inconvenientemente para usted) a medida que la materia se torne más complicada. No obstante, para contrarrestar esta inclinada pendiente teórica he incluido una gran cantidad de gráficas y diagramas que espero encuentre satisfactorias al momento de entender una idea o procedimiento particular de forma intuitiva. Además, y de ser posible, espero también que le motiven a continuar con el material de la guía y asumir cada uno de sus retos, pues la cantidad y variedad de ejercicios ha sido ampliada respecto a la primera parte.

Finalmente, quisiera pedirle, querido lector, que si en algún momento se siente sobrecogido por la dificultad o complejidad de los ejercicios no se dé por vencido con la materia. Busque ayuda donde pueda encontrarla, pero siempre persevere en su camino así como perseveran cada día profesores y estudiantes en su lucha por la educación, enalteciendo el espíritu y los valores de la Universidad Simón Bolívar a través de las vicisitudes. A tales efectos, espero le sirva este humilde trabajo.

Por un brillante futuro para nuestra amada Universidad.

Samuel Alonso
Buenos Aires, febrero de 2021

Cómo Usar la Guía

A lo largo de la guía, los problemas propuestos se encuentran organizados de dos maneras: por *tema* y *dificultad*. Cada enunciado es precedido por una etiqueta y el número de problema correspondiente a su tema. Las etiquetas dan una idea de la complejidad del problema:

- **T** de *trivial*; un ejercicio sólo para entrar en calor.
- **S** de *simple*; algo sencillo pero que requiere de más trabajo.
- **D** de *difícil*; un reto al lector, aunque no necesariamente algo pertinente a un parcial.
- **E** de *especial*; una aplicación interesante del contenido o un esfuerzo adicional por entender la teoría.

Los ejercicios de la guía han sido seleccionados de forma tal que le ahorren cálculos redundantes. Si en algún punto siente que el cálculo se vuelve extremadamente laborioso, seguramente ya habrá resuelto algo muy similar en ejercicios anteriores; la lista ha sido diseñada particularmente para que esto sea posible. En este sentido, es muy recomendable que no se salte ejercicios y que no esquive las demostraciones, de haberlas, sino que haga de la resolución de esta guía un proceso secuencial. De igual manera, encontrará la solución a cada ejercicio en la sección final. Asimismo, le invito a no evitar los ejercicios especiales, pues estarán completamente dentro de su alcance de haber resuelto los ejercicios anteriores. Como nota adicional, siéntase en la libertad de citar cualquier fórmula o teorema que requiera para la solución de los problemas, siempre y cuando no vaya en contra del propósito del ejercicio.

Como convenciones en la notación, a menos que se indique lo contrario, D denotará derivación total siempre y cuando no sea ambiguo respecto a otras variables o parámetros; para los casos en que sea ambiguo, el subíndice indicará la variable con respecto a la cual sucede la derivación. De forma similar, ∂ denotará derivación parcial. α , β , γ y λ usualmente denotarán parámetros, mientras que u , v , μ , x , z , s , ω y t usualmente denotarán variables. Un recordatorio útil es que $f(x)$ denota el valor de alguna función f evaluada en x , mientras que f hace referencia a la función en sí como objeto matemático. Al definir operadores diferenciales, el símbolo 1 se entenderá como el elemento identidad del espacio pertinente. Si f es alguna función, $\mathcal{L}(f)$ denotará su transformada de Laplace y $\mathfrak{F}(f)$ su transformada de Fourier.

Finalmente, cualquier información sobre errores de redacción o en la solución de alguno de los problemas será bien recibida y puede enviarla al correo del autor o al de GECOUSB¹. Si es profesor u ostenta algún cargo académico relacionado con la materia y desea participar en los esfuerzos de revisión, puede escribir a las direcciones anteriores.

¹14-10028@usb.ve, gecousb@gmail.com

*Para Isabel, cuya sonrisa me proveyó
siempre de ánimos y fuerzas,*

Mario, por su invaluable compañía y amistad,

*y todos mis compañeros de GECOUSB
por su honrada y abnegada labor;*

a ustedes dedico este trabajo.

Lista de Problemas

Series de Fourier

T.1

Sea $\phi_k(x) = e^{ikx}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Muestre que las funciones ϕ_m y ϕ_n son ortogonales respecto al producto interno \langle, \rangle donde

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (1)$$

S.1.A

Al igual que las ϕ_k , las funciones $\psi_n(x) = A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx)$ también satisfacen una relación de ortogonalidad para $n \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. Muestre que, en efecto, las funciones son ortogonales. Puede utilizar la identidad de Green,

$$fg'' - gf'' = D(fg' - gf'), \quad (2)$$

o emplear la ortogonalidad de las funciones ϕ_k . Recuerde que $D^2\psi_n + n^2\psi_n = 0$.

S.1.B

Es sabido del álgebra lineal que un producto interno \langle, \rangle induce la norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. A esta norma en particular, dada por

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

la denominaremos *norma* L^2 . Halle $\|u_n\|^2$ y $\|v_n\|^2$, donde $u_n = \sin(nx)$, $v_n = \cos(nx)$.

S.2.A

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función suave a trozos y 2π -periódica. Ahora, supongamos que

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Halle una fórmula para los coeficientes c_k empleando la ortogonalidad de las funciones $\phi_k(x) = e^{ikx}$. Expresé este resultado en términos del producto interno \langle, \rangle anteriormente definido.

S.2.B

De forma similar, si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave a trozos y 2π -periódica que satisfice

$$g(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx), \quad A_n, B_n \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Halle una fórmula para los coeficientes A_n, B_n usando la ortogonalidad de las funciones $\sin(nx), \cos(nx)$.

S.2.C

Por el momento, hemos tratado funciones f y g 2π -periódicas. Tomemos ahora una función $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suave a trozos, T -periódica y que satisfice

$$w(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}x}, \quad c_k \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Halle un producto interno apropiado tal que las funciones $\exp\left(i\frac{2\pi k}{T}x\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sean mutuamente ortogonales. Con el resultado anterior, halle una fórmula para los coeficientes c_k en términos del producto interno. Realice el mismo cálculo y halle fórmulas apropiadas para los coeficientes de la expansión en términos de funciones seno y coseno T -periódicas.

S.3

Sea $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Halle la serie trigonométrica de Fourier de f .

S.4

Halle la serie trigonométrica de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad (7)$$

S.5.A

En el contexto de la norma L^2 , el teorema de Parseval afirma que si f es una función suave a trozos 2π -periódica y que

$$S_N = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} \quad (8)$$

es la N -ésima suma parcial de su serie formal de Fourier, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|^2 = \|f\|^2. \quad (9)$$

A partir de esta afirmación, obtenga que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (10)$$

S.5.B

De forma similar, obtenga una expresión para la serie trigonométrica de Fourier de f .

S.5.C

Finalmente, obtenga una versión análoga del teorema de Parseval para funciones suaves a trozos T -periódicas.

S.6

Sea $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Halle la serie trigonométrica de Fourier de f . Además, halle los valores de las siguientes sumas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}. \quad (11)$$

S.7

Sea $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Halle la serie trigonométrica de Fourier de f . Luego, calcule el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}. \quad (12)$$

S.8

Sea $g : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x(\pi - x)$. Halle la serie trigonométrica de Fourier de g , y calcule las siguientes sumas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \quad (13)$$

S.9

Sea $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$. Encuentre la serie trigonométrica de Fourier de f y halle las siguientes sumas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}. \quad (14)$$

S.10

Sea $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Encuentre la serie trigonométrica de Fourier de f y calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - \alpha^2)^2} \quad (15)$$

S.11

Sea $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin^4(x)$. Halle la serie trigonométrica de Fourier de f .

S.12.A

Sea $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < \pi/2, \\ (x - \pi)^2 + \pi/2, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (16)$$

Halle una serie trigonométrica de Fourier para f usando sólo funciones seno.

S.12.B

De forma similar, halle una serie trigonométrica de Fourier para f usando sólo funciones coseno y un término constante.

S.13.A

Sea $f(u)$ una función T -periódica y

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) \quad (17)$$

su serie de Fourier trigonométrica correspondiente. Si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2\pi nu}{T}\right) \quad (18)$$

es la forma exponencial de la serie de Fourier, muestre que los coeficientes de la serie trigonométrica y exponencial se encuentran relacionados mediante

$$A_n = i(c_n - c_{-n}), \quad (19)$$

$$B_n = c_n + c_{-n}. \quad (20)$$

para $n \geq 1$, con $A_0 = c_0$.

S.13.B

Considere el cambio de variable $x = u - \varphi$. Suponga que, bajo este nuevo cambio, la serie de Fourier trigonométrica de $f(x + \varphi)$ es dada por

$$A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + B'_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right). \quad (21)$$

Expresé los coeficientes A'_0 , A'_n y B'_n en términos de los coeficientes de la serie trigonométrica original.

D.1

Sea $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^{-x}}. \quad (22)$$

Halle la serie trigonométrica de Fourier de f .

D.2

Sea $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + k^2 x^2}, \quad (23)$$

donde $k \geq 1$. Halle la serie trigonométrica de Fourier f .

D.3

Sea $f(-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \arctan \left(\frac{\alpha \sin(x)}{1 - \alpha \cos(x)} \right), \quad |\alpha| < 1. \quad (24)$$

Halle la serie trigonométrica de Fourier de f .

E.1.A

Las series de Fourier son capaces de aproximar con precisión arbitraria funciones a trozos 2π -periódicas debido a la ortogonalidad de las ϕ_n respecto al producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (25)$$

y a que éstas generan al espacio de funciones integrables bajo la norma L^2 sobre $[0, 2\pi]$. Sin embargo, las funciones ϕ_n no son las únicas que satisfacen propiedades de este estilo. Los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n + 1)P_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Estos polinomios, usualmente normalizados mediante la condición $P_n(1) = 1$, son mutuamente ortogonales respecto al producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (27)$$

es decir,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m. \quad (28)$$

Utilice la ecuación diferencial para probar la relación de ortogonalidad de los polinomios P_n . Sugerencia: considere

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m + n(n + 1)P_n P_m \quad (29)$$

y

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] P_n + m(m + 1)P_m P_n. \quad (30)$$

E.1.B

Puede demostrarse que los polinomios P_n generan el espacio de funciones a trozos integrables bajo la norma L^2 sobre $[-1, 1]$, de manera que si f es una función tal, y

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x), \quad (31)$$

entonces f_n converge a f en el sentido de la norma L^2 cuando $n \rightarrow \infty$, si

$$a_k = \frac{1}{\|P_k\|^2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx. \quad (32)$$

Entonces, y empleando las fórmulas

$$\|P_k\|^2 = \int_{-1}^1 P_k(x) P_k(x) dx = \frac{2}{2k+1}, \quad (33)$$

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \binom{k+n}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \quad k > 0, \quad (34)$$

$$P_0(x) = 1. \quad (35)$$

halle la expansión en polinomios de Legendre de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -1, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (36)$$

Ecuaciones en Derivadas Parciales

T.1.A

Sea $f = f(x, y)$. Considere la ecuación

$$\nabla_{\mathbf{u}} f = a \cdot f_x + b \cdot f_y = 0, \quad (37)$$

donde $\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Halle f que satisfaga la ecuación.

T.1.B

Usando el resultado anterior, encuentre una solución al problema de valor de frontera

$$\nabla_{\mathbf{u}} f = 0, \quad f(x, 0) = bx - \frac{1}{2}b^2x^2. \quad (38)$$

T.2

Encuentre las soluciones de

$$Df + \lambda f = 0 \quad (39)$$

y

$$D^2f + \lambda^2 f = 0, \quad (40)$$

para λ arbitraria. Considere los casos $\lambda = 0$, $\lambda^2 > 0$ y $\lambda^2 < 0$.

S.1

La ecuación de calor, dada por

$$\partial_t f - \alpha \nabla^2 f = 0, \quad \alpha > 0, \quad (41)$$

puede pensarse como la acción de un operador diferencial

$$L = \partial_t - \alpha \nabla^2 \quad (42)$$

sobre una función f , de manera que

$$\partial_t f - \alpha \nabla^2 f = Lf = 0. \quad (43)$$

Empleando el método de separación de variables, encuentre las autofunciones de este operador y escriba una solución genérica acotada para $t > 0$.

S.2

Siguiendo el mismo razonamiento del ejercicio anterior, encuentre las autofunciones del operador correspondiente a la ecuación de onda, dada por

$$\partial_t^2 \phi - c^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

y escriba una solución genérica acotada para la ecuación.

S.3

Sea $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$. Encuentre una solución acotada $f = f(x, t)$ al problema de valor de frontera dado por

$$\partial_t f - \alpha \nabla^2 f = 0, \quad f(0, t) = f(L, t) = 0 \quad (45)$$

para todo $t > 0$, $x \in (0, L)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, donde

$$f(x, 0) = \begin{cases} 1, & L/3 \leq x \leq 2L/3 \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \quad (46)$$

S.4

Halle una solución acotada $\phi = \phi(x, t)$ de la ecuación de onda

$$\partial_t^2 \phi - c^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad c > 0, \quad (47)$$

sobre $(x, t) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}^+$ tal que

$$\phi(-\pi, t) = \phi(\pi, t) = 0 \quad (48)$$

para todo $t > 0$ y

$$\phi(x, 0) = \sin(x) (1 - \cos(x)), \quad \partial_t \phi(x, 0) = 0. \quad (49)$$

S.5

Encuentre una solución genérica acotada $\psi = \psi(x, y)$ para la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (50)$$

donde $x > 0$.

S.6

Aunque la ecuación de calor en una dimensión espacial suele asociarse con el problema de difusión en una barra uniforme, esta también puede modelar la difusión del calor en estructuras anulares mediante condiciones de borde periódicas. Es decir,

$$\partial_t f - \alpha \nabla^2 f = 0, \quad \text{sobre } (x, t) \in (-\pi, \pi) \times (0, \infty) \quad (51)$$

con

$$f(-\pi, t) = f(\pi, t), \quad \partial_x f(-\pi, t) = \partial_x f(\pi, t). \quad (52)$$

Halle una solución al problema anterior, donde

$$f(x, 0) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (53)$$

S.7

Resuelva el problema de valor de frontera

$$\partial_t^2 \phi - c^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad \phi = \phi(x, t) \quad (54)$$

donde $x \in (-\pi, \pi)$, $t > 0$, tal que

$$\phi(-\pi, t) = \phi(\pi, t) = 0, \quad \partial_t \phi(x, 0) = 0, \quad (55)$$

y

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 1 - \cos(2x), & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (56)$$

S.8

Halle una solución a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \psi = \psi(x, y) \quad (57)$$

sobre $D = [0, 1] \times [0, 1]$ tal que

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 1) = x. \quad (58)$$

S.9.A

Considere el problema de valor de frontera

$$\partial_t f - \alpha \nabla^2 f = 0, \quad \alpha > 0 \quad (59)$$

donde

$$f = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (60)$$

con

$$\partial_x f(0, t) = \partial_x f(1, t) = 0 \quad (61)$$

y

$$f(x, 0) = \begin{cases} 1/2, & 1/4 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq x \leq 3/4, \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \quad (62)$$

Este problema, conocido como el problema de la barra aislada debido a las derivadas nulas en la frontera, describe el flujo de calor en una barra con ambos extremos térmicamente aislados. Resuelva el problema de valor de frontera planteado.

S.9.B

Dado que la barra se encuentra aislada en sus extremos, no es descabellado intuir que el valor promedio de las temperaturas sobre todos los puntos de la barra ha de mantenerse constante a medida que transcurre t . O, en otras palabras, que el calor inicialmente contenido en la barra ha de mantenerse dentro de ella. Considere

$$E(t) = \int_0^1 f(x, t) dx. \quad (63)$$

Esta integral está asociada con la energía total de la barra. Muestre que E satisface $E'(t) = 0$. ¿Sería esto posible con bordes no aislados? Explique.

S.10.A

En el caso bidimensional, la ecuación de onda puede factorizarse para obtener directamente soluciones genéricas. Manipule la ecuación

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \quad (64)$$

para mostrar que tal factorización es posible. Use la forma factorizada para mostrar que, en general, las soluciones $u(x, t)$ vienen dadas por

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad (65)$$

donde F y G son funciones arbitrarias de una variable. Pista: ¿cómo factorizaría usted $a^2 - b^2$?

S.10.B

Ahora, supongamos que

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \partial_t u(x, 0) = g(x). \quad (66)$$

Muestre que estas condiciones implican que

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad F(x) - G(x) = F(0) - G(0) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds. \quad (67)$$

S.10.C

Note que el resultado anterior es esencialmente un sistema lineal compuesto por F y G . Halle F y G , y luego sustituya para obtener la solución de D'Alembert de la ecuación de onda

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (68)$$

S.11

Use la fórmula de D'Alembert para hallar una solución $u = u(x, t)$ de la ecuación de onda para $-2\pi < x < 2\pi$, $t > 0$ tal que

$$u(x, 0) = \cos(3x) \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad \partial_t u(x, 0) = 0. \quad (69)$$

Asuma que $c = 1$. ¿Habría sido más rápido obtener a u mediante separación de variables? Explore la situación.

S.12.A

Suponga que se desea hallar una solución $\phi = \phi(x, t)$ a la ecuación de calor

$$\partial_t \phi - \alpha \nabla^2 \phi = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (70)$$

donde

$$\phi(0, t) = A, \quad \phi(L, t) = B, \quad A, B > 0 \quad (71)$$

y

$$\phi(x, 0) = g(x). \quad (72)$$

Como los extremos del dominio de solución están sometidos a temperaturas constantes A y B , nuestra intuición sobre la ecuación de calor nos indica que a medida que transcurre t la temperatura, ϕ , ha de tender a una cierta configuración de equilibrio ϕ_e . Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) = \phi_e(x). \quad (73)$$

Razone por qué ϕ_e no puede depender de t pero sí de x .

S.12.B

Como la configuración de equilibrio ϕ_e también debe ser solución de la ecuación de calor, además de satisfacer las condiciones $\phi_e(0) = A$, $\phi_e(L) = B$, entonces se obtiene que

$$\partial_t \phi_e - \alpha \nabla^2 \phi_e = -\alpha D^2 \phi_e = 0. \quad (74)$$

Halle una solución para ϕ_e que satisfaga las condiciones anteriores.

S.12.C

Considere finalmente a una función $\psi = \psi(x, t)$ dada por

$$\psi(x, t) = \phi(x, t) - \phi_e(x), \quad (75)$$

y replanteemos el problema original en términos de esta nueva función. Note que, a diferencia de ϕ , ψ satisface condiciones de frontera mucho más convenientes:

$$\psi(0, t) = \phi(0, t) - \phi_e(0) = 0, \quad \psi(L, t) = \phi(L, t) - \phi_e(L) = 0. \quad (76)$$

Determine a ψ usando la información anterior y, finalmente, resuelva para ϕ .

S.12.D

En el ejercicio hemos recurrido a una función auxiliar ϕ_e que representa la configuración de equilibrio del sistema para determinar a ϕ . Sin embargo, esto no significa que sea imposible utilizar separación de variables para resolver el problema.

Halle una solución al problema de valor de frontera planteado al inicio del ejercicio empleando separación de variables directamente.

S.13

Halle una solución $f = f(x, y)$ de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 f = 0, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (77)$$

tal que

$$f(x, 0) = e^{-2x} \sin(\pi x), \quad f(x, 1) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|, \quad (78)$$

y

$$f(0, y) = f(1, y) = 0. \quad (79)$$

S.14.A

Así como una función $f = f(x, y)$, definida en coordenadas cartesianas (x, y) por

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (80)$$

puede transformarse a su versión en coordenadas polares (r, θ) mediante

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad f(r, \theta) = r^2, \quad (81)$$

los operadores diferenciales en coordenadas cartesianas ∂_x, ∂_y también pueden reescribirse en términos de operadores diferenciales en coordenadas polares usando la regla de la cadena.

Considere la acción de $\partial_r, \partial_\theta$ sobre una función diferenciable arbitraria ϕ en coordenadas cartesianas, y reescriba a ∂_x, ∂_y en términos de $\partial_r, \partial_\theta$.

S.14.B

Usando los resultados anteriores, reescriba el operador Laplaciano ∇^2 en coordenadas polares.

D.1

La ecuación en derivadas parciales dada por

$$\partial_t^2 u + (\alpha + \beta) \partial_t u + \alpha \beta u = c^2 \partial_x^2 u, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (82)$$

es comúnmente conocida como la ecuación del telégrafo. Halle una solución $u = u(x, t)$ sobre $0 < x < L, t > 0$ tal que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = 0 \quad (83)$$

y

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\epsilon^{-1}, & L/2 - \epsilon \leq x < L/2 \\ \epsilon^{-1}, & L/2 \leq x \leq L/2 + \epsilon \end{cases} \quad (84)$$

para $0 < \epsilon < L/2$.

D.2.A

En ejercicios anteriores hemos resuelto la ecuación de calor homogénea,

$$\partial_t u - \alpha \nabla^2 u = 0, \quad (85)$$

para una variedad de condiciones de borde. Ahora, hallaremos una solución $u = u(x, t)$ de su versión no homogénea. Suponga que deseamos resolver el problema de valor de frontera dado por

$$\partial_t u - \alpha \nabla^2 u = f(x, t), \quad 0 < x < L, t > 0, \quad (86)$$

donde

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = g(x). \quad (87)$$

Considere una solución candidata de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \phi_n(x), \quad (88)$$

donde las Γ_n son funciones que dependen únicamente de t . Según las condiciones del problema, u debe anularse para $x = 0$, $x = L$. Sabiendo esto, asuma que las ϕ_n son autofunciones del operador D^2 y use su conocimiento de separación de variables para determinarlas.

D.2.B

Sustituya la solución candidata en la ecuación correspondiente, obtenga una EDO de primer orden para las funciones Γ_n y resuelva. No olvide incorporar la condición inicial $u(x, 0) = g(x)$. Pista: ¿es posible hallar expansiones para $f(x, t)$ y $g(x)$ en términos de las autofunciones ϕ_n ?

D.2.C

Tome $L = 1$ y encuentre una solución al problema de valor inicial descrito con

$$g(x) = \frac{L}{2} - \left| x - \frac{L}{2} \right|, \quad f(x, t) = \frac{\cos(\pi x - t)}{2\pi}. \quad (89)$$

D.3

Considere la ecuación de Laplace en coordenadas polares,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \partial_r (r \cdot \partial_r u) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u = 0. \quad (90)$$

Use separación de variables para encontrar una solución acotada $u = u(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace sobre $0 < r < 1$, $-\pi \leq \theta < \pi$, donde

$$u(1, \theta) = P\left(\frac{\theta}{\pi}\right), \quad P(\theta) = \frac{1}{8} (35\theta^4 - 30\theta^2 + 3), \quad (91)$$

y

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi). \quad (92)$$

D.4

Halle una solución $u = u(x, y)$ a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \quad (x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi], \quad (93)$$

donde

$$u(x, -\pi) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad u(x, \pi) = 0 \quad (94)$$

y

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y) = -\cos\left(\frac{y}{2}\right). \quad (95)$$

D.5

Encuentre una solución $u = u(r, \theta)$ en coordenadas polares a la ecuación

$$\nabla^2 u = 0, \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \quad (96)$$

donde

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u(1, \theta) = \cos(2\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (97)$$

E.1

En los cursos introductorios de variable compleja se suele insinuar que cada función analítica, por satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tiene por partes real e imaginaria funciones armónicas (es decir, soluciones de la ecuación de Laplace). Ahora, a través de la expansión en autofunciones sobre el disco unitario, podemos verificar este hecho.

Considere la solución general de la ecuación de Laplace en el disco unitario,

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta + B_n r^n \cos n\theta. \quad (98)$$

Use la fórmula de De Moivre para reescribir a u como la parte real de una función analítica sobre $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$.

E.2.A

Además de proveer una conexión manifiesta entre la ecuación de Laplace y las funciones analíticas, la solución en el disco unitario también es de gran utilidad para obtener el siguiente resultado importante:

Sea

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta + B_n r^n \cos n\theta \quad (99)$$

la solución general al problema de valor de frontera dado por

$$\nabla^2 u = 0, \quad r < 1, \quad -\pi \leq \theta < \pi, \quad (100)$$

donde

$$u(1, \theta) = h(\theta), \quad u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi). \quad (101)$$

Expresé los coeficientes a_n , b_n de u en términos de integrales y muestre que,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta - n\mu) \right] d\mu. \quad (102)$$

E.2.B

Siguiendo el mismo orden de ideas del ejercicio anterior, reescriba la suma anterior como una serie geométrica y encuentre para ella una forma cerrada. Finalmente, muestre que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \mu)} d\mu. \quad (103)$$

La función

$$K(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta)} \quad (104)$$

es un núcleo integral conocido como el Núcleo de Poisson.

E.3.A

Las funciones armónicas poseen una propiedad fundamental que las caracteriza: la propiedad del promedio. Supongamos que $u = u(x, y)$ es armónica sobre un disco centrado en $p = (x_0, y_0)$ y de radio a , $D_p(a)$. Entonces, el valor de u en el centro del disco, $u(x_0, y_0)$, es dado por

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{D_p(a)} u ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + a \cos \theta, y_0 + a \sin \theta) d\theta. \quad (105)$$

Primero, muestre que si $u(x, y)$ es armónica sobre $D_p(a)$, entonces

$$U(x, y) = u(x_0 + ax, y_0 + ay) \quad (106)$$

es armónica sobre $D_0(1)$, donde $D_0(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

E.3.B

Ahora, exprese los valores de frontera de $U(x, y)$ en términos de u . Finalmente, considere el valor de $U(0, 0)$ y afirme el resultado deseado. Pista: la fórmula de Poisson indica que si ϕ es una solución de la ecuación de Laplace en el disco unitario sujeta a $\phi(1, \theta) = h(\theta)$, entonces

$$\phi(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(1, \mu) d\mu. \quad (107)$$

Transformada de Fourier

T.1.A

Comenzaremos por demostrar las propiedades básicas de la transformada de Fourier para funciones L^1 . Sea $f \in L^1$, y sea $\hat{f} = \mathfrak{F}(f)$ su transformada de Fourier. Entonces, muestre que

$$\mathfrak{F}(f(ct))(\omega) = \frac{1}{|c|} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (108)$$

para $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

T.1.B

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\mathfrak{F}(f(t \pm t_0))(\omega) = e^{\pm i\omega t_0} \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (109)$$

T.1.C

De forma similar, muestre que

$$\mathfrak{F}(e^{\pm i\omega_0 t} f(t))(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega \mp \omega_0), \quad (110)$$

donde $\omega_0 \in \mathbb{R}$.

T.1.D

Supongamos adicionalmente que $f'(t) \in L^1$ y que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0. \quad (111)$$

Entonces, muestre que

$$\mathfrak{F}(Df)(\omega) = i\omega \cdot \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (112)$$

T.1.E

Suponga que $tf(t) \in L^1$. Entonces, muestre que

$$\mathfrak{F}(tf(t))(\omega) = iD \cdot \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (113)$$

T.2

Suponga que $t^k f(t) \in L^1$ para alguna f continua y $k \in \mathbb{N}$. Usando los resultados anteriores, Halle $\mathfrak{F}(t^k f(t))(\omega)$.

S.1

Sea f_ϵ una función dada por $f_\epsilon(x) = H(x + \epsilon) - H(x - \epsilon)$. Halle la transformada de Fourier de f_ϵ .

S.2

Sea g una función a trozos tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \quad (114)$$

Halle $\mathfrak{F}(g)$.

S.3.A

Sea $h(x) = x^2 e^{-|x|}$. Halle la transformada de Fourier de $h(x)$.

S.3.B

Sea f definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (115)$$

Halle $\mathfrak{F}(f)$.

S.4

Sea f_t tal que

$$f_t(x) = \frac{1 + \cos(x - t)}{1 + t}, \quad t - \pi \leq x \leq t + \pi \quad (116)$$

y

$$f_t(x) = 0 \tag{117}$$

para cualquier otro x . Halle $\mathfrak{F}(f_t)(\omega)$.

S.5.A

Es conocido que la transformada de Laplace satisface

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) \tag{118}$$

para funciones f, g , y donde $*$ denota la convolución. Si $f, g \in L^1$, muestre que

$$\mathfrak{F}(f * g) = 2\pi \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g). \tag{119}$$

S.5.B

La transformada de Fourier, además de la propiedad anterior, satisface otra propiedad similar pero inversa: Muestre que

$$\mathfrak{F}(f \cdot g) = 2\pi \mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) \tag{120}$$

para funciones $f, g \in L^1$.

S.6

Suponga que f tiene una transformada de Fourier dada por \hat{f} . Exprese

$$\mathfrak{F}(\sin(x)f(2x+1))(\omega) \tag{121}$$

en términos de \hat{f} .

S.7

Sea f una función dada por $f(x) = e^{-|x|} \cos(x)$. Halle la transformada de Fourier de f .

S.8

Sea f una función dada por

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (122)$$

y $f(x) = 0$ para cualquier otro valor de x . Halle $\mathfrak{F}(f)(\omega)$.

S.9

Sean f, g dos funciones cualesquiera del espacio de Schwartz, $S(\mathbb{R})$, con transformadas de Fourier dadas por

$$\hat{g} = \mathfrak{F}(g), \quad \hat{f} = \mathfrak{F}(f). \quad (123)$$

Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx. \quad (124)$$

Pista: recuerde que si $f, g \in S(\mathbb{R})$, entonces $f \cdot g \in S(\mathbb{R})$ y además $\hat{f}, \hat{g} \in S(\mathbb{R})$.

S.10.A

Así como el teorema de Parseval permite relacionar los coeficientes de la serie de Fourier de una función con su norma L^2 sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$, el siguiente resultado, conocido como el teorema de Plancherel, permite relacionar la transformada de Fourier de una función f con su norma L^2 sobre \mathbb{R} . Sea f una función del espacio de Schwartz; es decir, $f \in S(\mathbb{R})$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (125)$$

Sugerencia: recuerde que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (126)$$

y que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

S.10.B

De hecho, no solo la relación anterior es cierta, sino que también se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \quad (127)$$

para funciones $f, g \in S(\mathbb{R})$. Utilice un argumento similar para mostrar esta relación.

S.11.A

Anteriormente hemos explorado las propiedades de la transformada de Fourier para funciones L^1 , válidas también para funciones de $S(\mathbb{R})$. Ahora veremos que estas propiedades también son válidas para la transformada de Fourier de una distribución atemperada $K \in S^*(\mathbb{R})$. Muestre que

$$\mathfrak{F}\left(e^{\pm i\omega_0 t} K(t)\right)(\omega) = \mathfrak{F}(K)(\omega \mp \omega_0) \quad (128)$$

Recuerde que no necesariamente es lícito escribir

$$\mathfrak{F}(K)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (129)$$

S.11.B

Muestre que

$$\mathfrak{F}(K(t \pm t_0))(\omega) = e^{\pm i\omega t_0} \mathfrak{F}(K)(\omega). \quad (130)$$

S.11.C

Muestre que

$$\mathfrak{F}(D_g K)(\omega) = i\omega \cdot \mathfrak{F}(K)(\omega) \quad (131)$$

y que

$$\mathfrak{F}(tK(t))(\omega) = iD_g \cdot \mathfrak{F}(K)(\omega). \quad (132)$$

S.12

Halle $\mathfrak{F}(\delta)$, en el sentido distribucional. De forma similar, encuentre $\mathfrak{F}(1)$.

S.13

Halle la transformada de Fourier de $\sin(kx)$ y $\cos(kx)$, en el sentido distribucional, para $k \in \mathbb{R}$.

S.14.A

En **S.11** nos hemos tomado la molestia de probar nuevamente los resultados básicos de la transformada de Fourier en el contexto distribucional. Como las propiedades son idénticas, esto da la falsa impresión de que no existe diferencia alguna en términos de propiedades. Sin embargo, ambas nociones no son del todo iguales.

Sea $f \in S(\mathbb{R})$ una función del espacio de Schwartz y $\psi \in S^*(\mathbb{R})$ una distribución atemperada. Muestre que

$$\mathfrak{F}(f * \psi) \tag{133}$$

no equivale a $2\pi \hat{f} \cdot \hat{\psi}$, como sucedería en el caso convencional, sino que

$$\mathfrak{F}(f * \psi) = \hat{f} \cdot \hat{\psi} \tag{134}$$

en el sentido distribucional.

S.14.B

De forma similar, muestre que en el contexto distribucional **no sucede** que

$$\mathfrak{F}(f \cdot \psi) = 2\pi \hat{f} * \hat{\psi}, \tag{135}$$

sino que

$$\mathfrak{F}(f \cdot \psi) = \hat{f} * \hat{\psi}; \tag{136}$$

es decir, la fórmula es válida **sin** el factor 2π .

S.14.C

Sea $\chi_{[a,b]}$ una función definida para $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, por

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{137}$$

Halle $\mathfrak{F}(\chi_{[a,b]}(x) \sin(x))$ sin usar la definición o (110).

S.15

Sea g_k dada por

$$g_k(x) = \frac{\sin(kx)}{x}. \tag{138}$$

Encuentre $\mathfrak{F}(g_k)$.

S.16

Halle la transformada de Fourier de la función de Heaviside, en el sentido distribucional. ¿Cómo se compara esta transformada en relación a su transformada de Laplace?

S.17

Sean $a, b, u \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$. Halle el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at) \sin(b(u-t))}{t(u-t)} dt. \quad (139)$$

S.18

Considere

$$\psi(x) = \frac{1}{x}. \quad (140)$$

La función ψ no es integrable sobre \mathbb{R} y por tanto no posee una transformada de Fourier en el sentido clásico. Incluso, ni siquiera puede interpretarse de entrada como una distribución de $S^*(\mathbb{R})$ debido a su singularidad en el origen. Sin embargo, aún podemos asignar una transformada distribucional a ψ si interpretamos su acción sobre funciones de prueba de $S(\mathbb{R})$ según su valor principal de Cauchy:

$$\langle x^{-1} | g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{g(x) - g(-x)}{x} dx, \quad g \in S(\mathbb{R}). \quad (141)$$

Use la definición de la transformada en el sentido distribucional para hallar $\hat{\psi}$.

S.19

Sea f una función tal que

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 13}. \quad (142)$$

Halle la transformada de Fourier de f .

S.20

Suponga que la transformada de Fourier de una función f es dada por

$$\mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^4}. \quad (143)$$

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t) dt \quad \text{y} \quad Df(0). \quad (144)$$

S.21

Sea f una función dada por

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}. \quad (145)$$

Halle la transformada de Fourier de f .

S.22

Suponga que la transformada de Fourier de una función f es dada por

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + |\omega|^3}. \quad (146)$$

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * Df)(t)|^2 dt. \quad (147)$$

S.23

Es conocido que la función f dada por

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2c^2}\right), \quad c \neq 0, \quad (148)$$

satisface la ecuación diferencial

$$c^2 Df + xf = 0, \quad f(0) = 1. \quad (149)$$

Use esta relación para hallar la transformada de Fourier de f . Nota: recuerde que $f \in S(\mathbb{R})$.

S.24

Halle el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx. \quad (150)$$

D.1

Sea f una función continua tal que su transformada de Fourier es dada por

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\ln(1 + \omega^2)}{\omega^2}. \quad (151)$$

Evalúe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (152)$$

De forma similar, muestre que

$$f(1) = 2\pi \left(\frac{1}{e} - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right). \quad (153)$$

D.2.A

Sea f una función definida según

$$f(x) = \frac{x}{\sinh(\pi x)}. \quad (154)$$

Encuentre la transformada de Fourier de f .

D.2.B

La *integral de Abel* es una integral dada por

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(e^{\pi x} - e^{-\pi x})(x^2 + 1)} dx. \quad (155)$$

Use el resultado anterior para evaluar la integral.

D.2.C

Considere la función h_μ dada por

$$h_\mu(x) = \frac{\sinh(\mu x)}{\sinh(x)}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (156)$$

Encuentre $\mathfrak{F}(h_\mu)$.

D.3

Calcule el valor de la integral dada por

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} \sin^2(x)}{x^2} dx, \quad \alpha > 0. \quad (157)$$

D.4.A

Sea $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Muestre que la transformada de Fourier de f es de la forma

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{e^{-|\omega|}}{|\omega|} + c\delta(\omega) \quad (158)$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante.

D.4.B

Para determinar el valor de la constante, basta con imponer que \hat{f} satisfaga la definición de la transformada distribucional. De esta manera, tome a $|x|^{-1}$ como la distribución que actúa sobre funciones de prueba según

$$\langle |x|^{-1} | \psi(x) \rangle = \int_{|x| \leq 1} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{|x|} dx + \int_{|x| > 1} \frac{\psi(x)}{|x|} dx \quad (159)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x) - H(1 - |x|)\psi(0)}{|x|} dx \quad (160)$$

y muestre que

$$\langle \hat{f} | g \rangle = c \langle \delta | g \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x} dx \right\} d\omega \quad (161)$$

para $g \in S(\mathbb{R})$ arbitraria.

D.4.C

Luego, para evaluar la integral sobre x considere

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x^{1-\epsilon}} dx. \quad (162)$$

La cantidad ϵ es comúnmente conocida como un *regulador* y permite calcular el valor de la integral cancelando las singularidades entre sí. Efectúe la integral, tome $\epsilon \rightarrow 0$, y recupere el valor deseado. Finalmente, compare con $\langle f | \hat{g} \rangle$ y determine a c . Sugerencia: la función Gamma de Euler es una función definida según

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \quad (163)$$

y su serie de Laurent alrededor de $z = 0$ es dada por

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + \left[\frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\zeta(2)}{2} \right] z + \dots \quad (164)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y ζ es la función zeta de Riemann.

E.1.A

Los coeficientes de las series de Fourier exponencial y trigonométrica de una función continua a trozos f ,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}, \quad c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(mx) + b_m \cos(mx), \quad (165)$$

están relacionados mediante la siguientes ecuaciones

$$a_m = i(c_m - c_{-m}), \quad b_m = c_m + c_{-m} \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots \quad (166)$$

Ahora en el contexto de la transformada de Fourier, podemos generalizar los coeficientes c_m por su equivalente continuo $\hat{f}(m)$, y escribir

$$\hat{f}^s(\omega) = i(\hat{f}(\omega) - \hat{f}(-\omega)), \quad \hat{f}^c(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{f}(-\omega). \quad (167)$$

A través de las fórmulas, exprese a \hat{f}^s y \hat{f}^c en términos de f . Estas dos nuevas funciones son conocidas como las transformadas Seno y Coseno de f .

E.1.B

Use las fórmulas en sentido contrario para expresar a la transformada de Fourier en términos de las transformadas Seno y Coseno.

E.1.C

Finalmente, utilice la relación anterior para obtener la fórmula de inversión en términos de \hat{f}^c y \hat{f}^s , dada por

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}^c(\omega) \cos(\omega x) d\omega + \int_0^\infty \hat{f}^s(\omega) \sin(\omega x) d\omega. \quad (168)$$

E.2.A

La propiedad de escalado de la transformada de Fourier es el primer indicio de que mientras más se dilata una función, más se estrecha su transformada de Fourier. En efecto, si $c > 0$, entonces

$$f(ct) \rightarrow \frac{1}{c} \hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right). \quad (169)$$

Ahora veremos una relación más precisa entre una función f y su transformada: la desigualdad de Heisenberg, mejor conocida en el contexto de la mecánica cuántica como el Principio de Incertidumbre.

Primero, consideremos una función f cuadrado-integrable con

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1 \quad (170)$$

y de rápido decrecimiento a medida que $|x| \rightarrow \infty$. Debido a que $\phi(x) = |f(x)|^2$ satisface (170), esta clase de funciones pueden pensarse como funciones de densidad de probabilidad. Usando el teorema de Plancherel sobre f , podemos obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}, \quad (171)$$

de forma que

$$\psi(\omega) = 2\pi |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (172)$$

también describe una función de densidad de probabilidad. Supongamos que la media de tanto ψ como ϕ es nula y consideremos el producto de las variancias de ϕ y ψ :

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot 2\pi |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (173)$$

Muestre que

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |Df(x)|^2 dx. \quad (174)$$

E.2.B

Empleando la desigualdad de Cauchy-Schwartz para el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (175)$$

en la expresión anterior obtenemos que

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \cdot Df(x) dx \right|^2. \quad (176)$$

Utilice

$$|z| \geq \operatorname{Re}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (177)$$

para mostrar que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \cdot Df(x) dx \right|^2 \geq \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x D(|f(x)|^2) dx \right)^2. \quad (178)$$

E.2.C

Luego, use integración por partes para mostrar que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x D(|f(x)|^2) dx \right)^2 = 1. \quad (179)$$

Finalmente, obtenga que

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) \geq \frac{1}{4}. \quad (180)$$

En esencia, ésta es la desigualdad de Heisenberg: Si la variancia de ϕ es chica, entonces la variancia de ψ ha de ser lo suficientemente grande para satisfacer la desigualdad y vice versa. Lejos de ser un *principio*, es simplemente una propiedad fundamental de las variables conjugadas (f y su transformada \hat{f}).

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

T.1

Halle una distribución atemperada u que satisfaga la ecuación diferencial

$$D^2u + k^2u = 0. \quad (181)$$

T.2

De forma similar, halle una distribución atemperada f que satisfaga

$$D^2f + \lambda Df + \eta f = 0. \quad (182)$$

S.1.A

Considere el problema de hallar una solución $u = u(x, t)$ a la ecuación de calor

$$\partial_t u - \alpha \nabla^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (183)$$

donde $u(x, 0) = f(x)$. Usando la transformada de Fourier, muestre que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha \omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \quad (184)$$

donde ϕ es una función que satisface

$$\phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (185)$$

S.1.B

Muestre además que una forma alternativa para u es

$$u = K * f \quad (186)$$

donde $K = K(x, t)$ y la convolución sucede sobre la variable espacial. K es conocido como el *Núcleo de Calor*, de forma similar al núcleo integral de Poisson. Determine a K .

S.1.C

Use el resultado anterior para hallar una solución u que satisfaga $u(x, 0) = \delta(x)$.

S.2.A

Sea f una función tal que $tf(t) \in L^1$ y sea

$$\mathfrak{F}^c(f)(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (187)$$

las transformada Coseno de f . Muestre que

$$D \mathfrak{F}^c(f)(\omega) = -\mathfrak{F}^s(tf(t))(\omega), \quad (188)$$

y que

$$D \mathfrak{F}^s(f)(\omega) = \mathfrak{F}^c(tf(t))(\omega), \quad (189)$$

donde

$$\mathfrak{F}^s(f)(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (190)$$

es la transformada Seno de f .

S.2.B

De forma similar, sea f una función tal que $f'(t) \in L^1$ y

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0. \quad (191)$$

Muestre que

$$\mathfrak{F}^c(Df)(\omega) = \omega \cdot \mathfrak{F}^s(f)(\omega) \quad (192)$$

y que

$$\mathfrak{F}^s(Df)(\omega) = -\omega \cdot \mathfrak{F}^c(f)(\omega). \quad (193)$$

S.3.A

Suponga que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función par. Usando la convención del ejercicio anterior, exprese la transformada de Fourier de f en términos de sus transformadas seno y coseno. ¿Cambiaría la expresión si f fuese impar? Explique.

S.3.B

Considere nuevamente la ecuación de calor, pero esta vez sobre una barra semi-infinita en $(0, \infty)$. Si la barra se encuentra aislada en el extremo de $x = 0$, entonces cualquier solución $u = u(x, t)$ debe satisfacer la condición de borde $\partial_x u(0, t) = 0$. ¿Pueden las funciones pares satisfacer esta condición de forma automática? ¿Se puede decir lo mismo de las funciones impares? Explique.

S.4.A

A partir de la solución general dada en (184) y su deducción, use la transformada Coseno para hallar una solución $g = g(x, t)$ a la ecuación de calor

$$\partial_t g - \alpha \nabla^2 g = 0, \quad x, t > 0 \quad (194)$$

donde

$$g(x, 0) = \chi_{[1,2]}(x), \quad \partial_x g(0, t) = 0. \quad (195)$$

S.4.B

De forma similar, use la transformada Seno para encontrar una solución g que satisfaga

$$g(x, 0) = \chi_{[1,2]}(x), \quad g(0, t) = 0. \quad (196)$$

S.5

Una señal (o función) de banda limitada f es aquella cuya transformada de Fourier \hat{f} posee un soporte compacto. Es decir, se anula fuera de un cierto intervalo finito. Suponga que

$$\hat{f}(\omega) = 0, \quad |\omega| \geq \pi. \quad (197)$$

Si la energía de la señal, E_f , es dada por

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad (198)$$

exprese a E_f en términos de los valores $f(n)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Estos valores en puntos discretos suelen llamarse *muestras* de f . Pista: ¿puede \hat{f} tener una serie de Fourier?

S.6.A

Use la transformada de Fourier para hallar una solución acotada $u = u(x, t)$ a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (199)$$

donde $u(x, 0) = f(x)$.

S.6.B

Muestre que, al igual que la ecuación de calor, también es posible escribir una solución genérica para u de la forma

$$u = K * f, \quad (200)$$

donde K es el núcleo de Poisson, calculado anteriormente en (104) usando coordenadas polares.

S.6.C

Use el resultado anterior para determinar una solución u que satisfaga $u(x, 0) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(x)$.

S.7.A

Si nos dejamos llevar por la forma integral de las soluciones genéricas a la ecuación de calor y la ecuación de Laplace, pronto nos convenceremos de que estos métodos simplemente no son capaces de proveer las soluciones *constantes* que obtuvimos en secciones anteriores empleando separación de variables. Por ejemplo: la solución genérica de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad (201)$$

sobre el semiplano superior es dada por

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega, \quad \text{con } \phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (202)$$

Esta solución (aparentemente) requiere que f sea integrable. Como consecuencia, si $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, entonces la expresión $\phi = \mathfrak{F}(f)$ no tiene sentido en el contexto clásico pues la integral correspondiente no converge. Sin embargo, podemos remediar esta dificultad ampliando nuestra noción de transformada de Fourier al contexto distribucional, tal y como hicimos en la sección anterior. Así, encuentre una solución $u(x, y)$ a la ecuación de Laplace en el semiplano superior con $u(x, 0) = c$.

S.7.B

Siguiendo el mismo orden de ideas sobre funciones no integrables, ¿es posible encontrar también una solución tal que $u(x, 0) = \text{sinc}(x)$?

S.8

Use la transformada de Fourier para hallar una solución $f = f(x, y)$ a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 f = 0, \quad (203)$$

sobre la franja infinita

$$x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < H, \quad (204)$$

donde

$$f(x, 0) = u(x), \quad f(x, H) = g(x). \quad (205)$$

S.9.A

Un resultado fundamental para la teoría de las telecomunicaciones es el Teorema de Muestreo de Nyquist-Shannon. A pesar de que la prueba formal es bastante elaborada, podemos entender el razonamiento con el siguiente ejemplo: sea f una función L^2 de banda limitada, tal que

$$\hat{f}(\omega) = 0, \quad \text{para } |\omega| \geq L. \quad (206)$$

Considere la serie de Fourier exponencial de \hat{f} sobre $(-L, L)$ y muestre que

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\omega n\pi/L}. \quad (207)$$

S.9.B

Finalmente, escriba a f en términos de \hat{f} y obtenga que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \text{sinc}(Lt - n\pi). \quad (208)$$

Esta expresión ilustra como f puede reconstruirse perfectamente utilizando solo valores (o *muestras*) de f dados sobre

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{L}, \pm \frac{2\pi}{L}, \dots \quad (209)$$

D.1.A

En secciones anteriores exploramos cómo una expansión en autofunciones permite determinar una solución al problema de la ecuación de calor no homogénea. Y si bien en aquel procedimiento encontramos una solución sobre un dominio acotado espacialmente, podemos igualmente encontrar una solución sobre la recta real empleando la transformada de Fourier. Considere

$$\partial_t u(x, t) - \alpha \nabla^2 u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (210)$$

con $u(x, 0) = g(x)$. Use la transformada de Fourier para mostrar que

$$\hat{u}(\omega, t) = \phi(\omega)e^{-\alpha\omega^2 t} + e^{-\alpha\omega^2 t} \int_0^t e^{\alpha\omega^2 \mu} \psi(\omega, \mu) d\mu, \quad (211)$$

con

$$\phi(\omega) = \mathfrak{F}(g)(\omega), \quad \psi(\omega, t) = \mathfrak{F}(f)(\omega, t). \quad (212)$$

D.1.B

A partir de la expresión anterior para \hat{u} , recupere a u y muestre que satisface una expresión similar a (200) dada por

$$u(x, t) = (K_t * g)(x, t) + \int_0^t (K_{t-\mu} * f)(x, \mu) d\mu \quad (213)$$

donde la convolución sucede sobre la variable espacial y

$$K_t(x) = K(x, t) \quad (214)$$

es el núcleo de calor. Pista: ¿se cumple que

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\int_0^t \hat{\eta}(\omega, s) ds \right) = \int_0^t \mathfrak{F}^{-1}(\hat{\eta})(x, s) ds \quad (215)$$

para η arbitraria?

D.2.A

Así como las ondas planas

$$e^{i(kx - \omega t)} \quad (216)$$

son soluciones de la ecuación de onda para $\omega(k) = kc$, también lo son las superposiciones continuas de ondas planas. Considere una función $u = u(x, t)$ dada por

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (217)$$

En el ámbito de la física, esta función es conocida como un *paquete de ondas*. Muestre que u satisface

$$\partial_t^2 u = c^2 \nabla^2 u \quad (218)$$

para $\omega(k) = kc$.

D.2.B

Una de las características más importantes de (217) es que describe a un paquete de ondas que viaja sin deformarse; es decir, sin dispersión alguna. Esto no es consecuencia de la forma integral de u , sino de la relación entre ω y k , comúnmente denominada como la *relación de dispersión*.

Además de la ecuación de onda, existen otras EDPs que admiten soluciones ondulatorias pero con diferentes relaciones de dispersión. Considere la ecuación de Schrödinger para una partícula libre,

$$-i\hbar \partial_t \psi = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (219)$$

Proponga que $\psi = \psi(x, t)$ sea de la forma (217) y encuentre una relación de dispersión apropiada tal que ψ sea solución de (219).

D.2.C

Finalmente, determine a ψ suponiendo que

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(-x^2 + ik_0 x)}. \quad (220)$$

D.3.A

Halle una solución $u = u(x, y)$ al problema de valor de frontera

$$\nabla^2 u = 0 \quad (221)$$

sobre el primer cuadrante del plano,

$$x > 0, \quad y > 0, \quad (222)$$

donde

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = g(y) \quad (223)$$

y $f(0) = g(0) = 0$.

D.3.B

Usando los resultados anteriores, halle una solución para

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2n, 2n+1]}, \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2n+1, 2n+2]}. \quad (224)$$

Soluciones

Series de Fourier

T.1

Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ y considere

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^{2\pi} \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx. \quad (225)$$

Si $n = m$, entonces

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi. \quad (226)$$

Sin embargo, si $n \neq m$, entonces la expresión general resulta

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad (227)$$

puesto que $n - m \in \mathbb{Z}$ y por tanto

$$e^{2\pi i(n-m)} = 1. \quad (228)$$

Finalmente, vemos que para $n, m \in \mathbb{Z}$, las funciones e^{inx} y e^{imx} son ortogonales entre sí respecto a la operación definida. Observe que no son *ortonormales*, dado que no satisfacen

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = 1. \quad (229)$$

S.1.A

Primero, veamos que las funciones ψ_n son ortogonales entre sí empleando la identidad de Green. Considere a ψ_n y ψ_m , con $n, m \in \mathbb{Z}$. Aplicando la identidad de Green, obtenemos

$$\psi_m \psi_n'' - \psi_m'' \psi_n = D(\psi_m \psi_n' - \psi_m' \psi_n). \quad (230)$$

Pero como $\psi_n'' + n^2 \psi_n = 0$, entonces

$$\psi_m \psi_n (m^2 - n^2) = D(\psi_m \psi_n' - \psi_m' \psi_n). \quad (231)$$

Así, vemos que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{2\pi} \psi_m(x) \overline{\psi_n(x)} dx = \int_0^{2\pi} \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \frac{1}{(m^2 - n^2)} \psi_m \psi_n' - \psi_m' \psi_n \Big|_0^{2\pi}. \quad (232)$$

Sin embargo, como

$$\psi_n(0) = \psi_n(2\pi) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (233)$$

entonces

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \frac{1}{(m^2 - n^2)} (0 \cdot \psi_n'(2\pi) - 0 \cdot \psi_m'(2\pi) - 0 \cdot \psi_n'(0) + 0 \cdot \psi_m'(0)) = 0 \quad (234)$$

para $m \neq n$. Ahora, si tomamos $m = n$, entonces podemos expresar directamente

$$\langle \psi_n, \psi_n \rangle = \int_0^{2\pi} \psi_n^2 dx. \quad (235)$$

Por el momento, el valor de la integral no nos interesa. Basta con asegurar que sea distinta de cero. Como ψ_n es continua y no idénticamente cero para todo $x \in (0, 2\pi)$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \psi_n^2 dx > 0. \quad (236)$$

Por tanto, $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$ para $m \neq n$, y distinto de cero para $m = n$. También es posible obtener la ortogonalidad de las ψ_n extendiendo de la ortogonalidad de las ϕ_n . Note que

$$\psi_n = \frac{1}{2} (B_n - iA_n) \phi_n + \frac{1}{2} (B_n + iA_n) \phi_{-n}, \quad (237)$$

de manera que $\langle \psi_m, \psi_n \rangle$ se expresa completamente en términos de productos del tipo $\langle \phi_m, \phi_n \rangle$, que ya hemos determinado como ortogonal.

S.1.B

Para hallar $\|u_n\|^2$ y $\|v_n\|^2$ basta con plantear las integrales correspondientes. Para u_n ,

$$\|u_n\|^2 = \langle u_n, u_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2i} \phi_n - \frac{1}{2i} \phi_{-n}, \frac{1}{2i} \phi_n - \frac{1}{2i} \phi_{-n} \right\rangle \quad (238)$$

$$= \frac{1}{4} \langle \phi_n, \phi_n \rangle + \frac{1}{4} \langle \phi_{-n}, \phi_{-n} \rangle = \pi, \quad (239)$$

en virtud de (226). No se deje engañar: el producto interno en cuestión es *hermítico*, y por tanto las constantes del segundo argumento deben ser conjugadas al salir de las llaves. Si aún no le queda claro, revise la definición integral. Finalmente, para calcular $\|v_n\|^2$ basta con observar que, como $v_n^2 = 1 - u_n^2$, entonces

$$\int_0^{2\pi} v_n^2 dx = \langle v_n, v_n \rangle = 2\pi - \langle u_n, u_n \rangle = \pi. \quad (240)$$

S.2.A

Es posible expresar los coeficientes en términos de integrales de f mediante un procedimiento conocido popularmente como el *truco de Fourier*: considere

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}. \quad (241)$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k \phi_k. \quad (242)$$

De aquí que entonces

$$\langle f, \phi_m \rangle = \sum_{k=-N}^N c_k \langle \phi_k, \phi_m \rangle. \quad (243)$$

Pero como $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$ para $m \neq n$, entonces todos excepto el m -ésimo término de la suma se anulan, y por tanto

$$\langle f, \phi_m \rangle = \sum_{k=-N}^N c_k \langle \phi_k, \phi_m \rangle = c_m \langle \phi_m, \phi_m \rangle. \quad (244)$$

Así, vemos que c_m puede expresarse mediante

$$c_m = \frac{\langle f, \phi_m \rangle}{\langle \phi_m, \phi_m \rangle}. \quad (245)$$

Recordando (226), obtenemos finalmente que

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \langle f, \phi_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx. \quad (246)$$

S.2.B

Como en el ejercicio anterior, sean $u_n = \sin(nx)$ y $v_n = \cos(nx)$. Así,

$$g(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n u_n + B_n v_n. \quad (247)$$

Recuerde que $\langle u_n, u_m \rangle = 0$ para $n \neq m$ y $\langle v_n, u_m \rangle = 0$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Siguiendo el mismo orden de ideas,

$$\langle g, u_m \rangle = \langle A_0, u_m \rangle + \sum_{n=1}^N A_n \langle u_n, u_m \rangle + B_n \langle v_n, u_m \rangle = A_m \langle u_m, u_m \rangle, \quad (248)$$

puesto que $\langle A_0, u_m \rangle = A_0 \langle v_0, u_m \rangle = 0$ y en virtud de (239). Por lo tanto,

$$A_m = \frac{1}{\pi} \langle g, u_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx) dx. \quad (249)$$

De forma idéntica, pero ahora con v_m , obtenemos

$$B_m = \frac{1}{\pi} \langle g, v_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos(nx) dx. \quad (250)$$

Finalmente, el coeficiente A_0 puede obtenerse notando que $A_0 = A_0 v_0$, de forma que

$$\langle g, v_0 \rangle = A_0 \langle v_0, v_0 \rangle = 2\pi A_0, \quad (251)$$

y por tanto

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \langle g, v_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx. \quad (252)$$

S.2.C

Originalmente el producto interno que habíamos definido era de la forma

$$\int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (253)$$

de manera que

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^{2\pi} \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 2\pi & n = m, \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (254)$$

Al principio, observamos que la ortogonalidad surgía del hecho de que las funciones $\phi_n(x) = e^{inx}$ son 2π -periódicas. Como las funciones

$$\exp\left(i \frac{2\pi nx}{T}\right) \quad (255)$$

son T -periódicas, entonces podemos esperar que sean ortogonales respecto a

$$\langle f, g \rangle_T = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (256)$$

En efecto,

$$\int_0^T \exp\left(i\frac{2\pi nx}{T}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi mx}{T}\right) dx = \frac{T}{2\pi i(n-m)} \exp\left(i\frac{2\pi(n-m)x}{T}\right) \Big|_0^T = 0, \quad (257)$$

para $n \neq m$. Esta relación es válida incluso para

$$\langle f, g \rangle_T = \int_a^{T+a} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (258)$$

Si $n = m$, entonces

$$\int_0^T \exp\left(i\frac{2\pi nx}{T}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi mx}{T}\right) dx = T. \quad (259)$$

Finalmente, y como el único requisito para extraer los coeficientes c_k de la suma es que las funciones sean ortogonales respecto al producto interno, podemos usar la fórmula de (245) directamente. Así,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T w(x) \exp\left(-i\frac{2\pi kx}{T}\right) dx. \quad (260)$$

Aunque la forma más general

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{T+a} w(x) \exp\left(-i\frac{2\pi kx}{T}\right) dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (261)$$

también es válida. Luego veremos que es útil al analizar series de Fourier sobre dominios simétricos o desplazados. Note también que si $T = 2\pi$, obtenemos de vuelta la fórmula original. Para el caso trigonométrico, considere

$$h(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right). \quad (262)$$

Como

$$\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) = \frac{1}{2i} \exp\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) - \frac{1}{2i} \exp\left(-\frac{2\pi nx}{T}\right), \quad (263)$$

entonces las funciones

$$u_n = \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \quad v_n = \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \quad (264)$$

también son ortogonales con respecto a \langle, \rangle_T , en virtud de la ortogonalidad de las funciones exponenciales. Luego, y extendiendo las fórmulas de (239) para el nuevo producto,

$$\langle u_n, u_n \rangle_T = \langle v_n, v_n \rangle_T = \frac{T}{2}. \quad (265)$$

Finalmente, las fórmulas para los coeficientes del caso trigonométrico pueden obtenerse directamente como

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T h(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T h(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T h(x) dx. \quad (266)$$

No pierda de vista cómo la ortogonalidad de las funciones respecto al producto interno es lo que nos permitió extender las fórmulas a cualquier dominio simplemente reemplazando \langle, \rangle por \langle, \rangle_T . Esta es la propiedad fundamental que hace posible la expansión de Fourier en senos y cosenos, e incluso expansiones con otras familias de funciones.

S.3

En este primer ejercicio exploraremos la estrategia general para analizar las expansiones de Fourier que usaremos más adelante. Como la serie de Fourier de f no es más que una (excelente) aproximación de f sobre un dominio dado, el primer paso siempre es determinar una familia de funciones ortogonales respecto a un producto interno definido sobre dicho dominio. Para este caso particular, el dominio es el intervalo $(0, 2\pi)$ y las funciones son senos y cosenos según (247), junto con el producto interno correspondiente. Así, los coeficientes de Fourier según (247) vienen dados por

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = \pi, \quad (267)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) \, dx = -\frac{2}{n}, \quad (268)$$

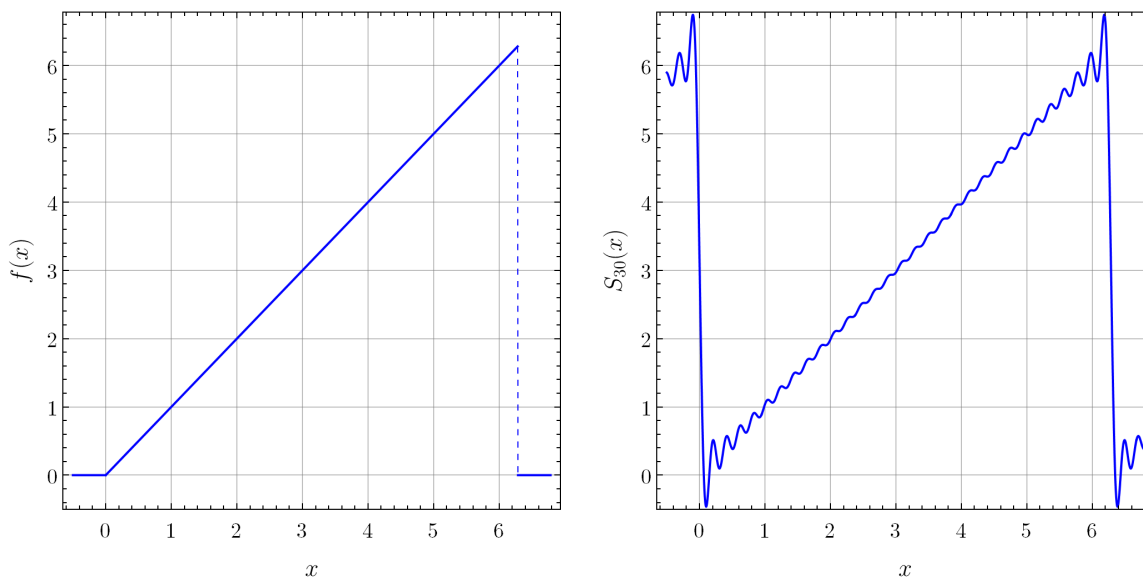
$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) \, dx = 0. \quad (269)$$

Finalmente, juntando todos los resultados obtenemos que la serie de Fourier de f es dada por

$$f(x) \sim \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(nx)}{n}. \quad (270)$$

A continuación se muestran gráficas de la función f y la suma parcial de su serie de Fourier hasta 30 términos,

$$S_{30}(x) = \pi - \sum_{n=1}^{30} \frac{2 \sin(nx)}{n}. \quad (271)$$



S.4

Al igual que en el ejercicio anterior, construiremos la serie de Fourier de f empleando las funciones

$$\sin(nx), \quad \cos(nx), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (272)$$

y el producto interno usual. Primero, veamos que

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi dx - \int_\pi^{2\pi} dx \right) = 0. \quad (273)$$

Luego, A_n puede calcularse simplemente efectuando la integral.

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_\pi^{2\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)). \quad (274)$$

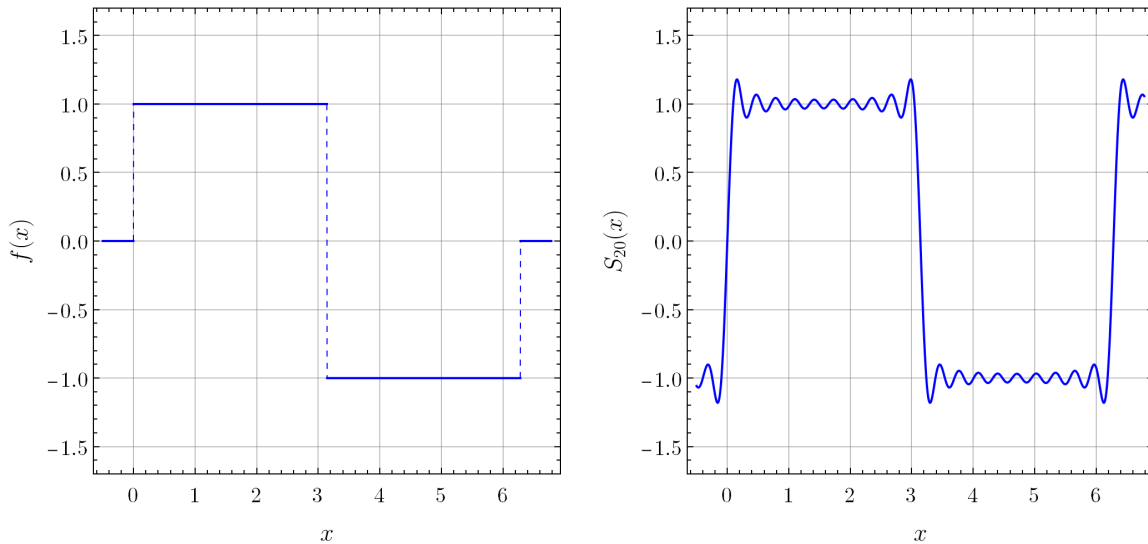
Para B_n la situación es similar,

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \sin(nx) \Big|_0^\pi - \frac{1}{n\pi} \sin(nx) \Big|_\pi^{2\pi} = 0. \quad (275)$$

Finalmente, juntando los resultados anteriores, la serie trigonométrica de Fourier para f es dada por

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \sin(nx) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nx). \quad (276)$$

A continuación se muestran gráficas de $f(x)$ y la suma parcial de la serie de Fourier de f hasta 20 términos.



S.5.A

Por más intimidante que parezca la afirmación, en realidad no es más que una reescritura astuta. Note que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \langle f, f \rangle = \|f\|^2. \quad (277)$$

Por otra parte,

$$\|S_N\|^2 = \langle S_N, S_N \rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \sum_{m=-N}^N c_m e^{imx} \right\rangle. \quad (278)$$

Dado que el producto interno es lineal en ambos argumentos, podemos transformar la expresión anterior de la siguiente forma (no olvide que el producto es *hermítico*, y las constantes del segundo argumento deben salir conjugadas):

$$\left\langle \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \sum_{m=-N}^N c_m e^{imx} \right\rangle = \sum_{k=-N}^N c_k \left\langle e^{ikx}, \sum_{m=-N}^N c_m e^{imx} \right\rangle = \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k \overline{c_m} \langle e^{ikx}, e^{imx} \rangle. \quad (279)$$

Sin embargo, como las funciones e^{ikx} son mutuamente ortogonales respecto al producto interno, entonces todos los términos de la suma se anulan excepto aquellos de la forma $\langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle$. Así,

$$\langle S_N, S_N \rangle = \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k \overline{c_m} \langle e^{ikx}, e^{imx} \rangle = 2\pi \sum_{k=-N}^N c_k \overline{c_k} = 2\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2. \quad (280)$$

Como el teorema de Parseval afirma que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|^2 = \|f\|^2, \quad (281)$$

entonces se sigue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (282)$$

S.5.B

Para el caso trigonométrico, el procedimiento es idéntico. Omitiendo los términos que se anulan para ahorrar en escritura,

$$\langle S_N, S_N \rangle = \langle A_0, A_0 \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N A_k \overline{A_n} \langle \sin(kx), \sin(nx) \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N B_k \overline{B_n} \langle \cos(kx), \cos(nx) \rangle. \quad (283)$$

Evaluando los productos internos y usando el mismo argumento de ortogonalidad que en el caso anterior, obtenemos que

$$\langle S_N, S_N \rangle = 2\pi |A_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^N |A_k|^2 + \pi \sum_{k=1}^N |B_k|^2. \quad (284)$$

Finalmente,

$$2\pi |A_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 + |B_k|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (285)$$

S.5.C

Para el caso general, basta con tomar (283), reemplazar a \langle, \rangle por \langle, \rangle_T y las funciones seno y coseno por las calculadas anteriormente en (264). El producto resultante tendrá exactamente la misma forma porque no depende del valor del producto en sí, sino de la ortogonalidad de las funciones. Nuevamente, vemos que es la ortogonalidad la que hace a todo esto posible. Así, reduciendo (283) con los valores apropiados para los productos, obtenemos

$$\langle S_N, S_N \rangle_T = T |A_0|^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^N |A_k|^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^N |B_k|^2, \quad (286)$$

y por tanto

$$T |A_0|^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 + |B_k|^2 = \int_0^T |f(x)|^2 dx. \quad (287)$$

S.6

Sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$, las funciones $\sin(nx)$ y $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{Z}$, son ortogonales con respecto al producto interno de (261), donde $T = 2\pi$, $a = \pi$. Por tanto, los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier vendrán dados por

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx, \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx, \quad (288)$$

y la serie de Fourier tendrá la forma

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx). \quad (289)$$

Evaluando A_0 ,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} x dx - \int_{-\pi}^0 x dx \right) = \frac{\pi}{2}. \quad (290)$$

Luego, puede determinarse que

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx) dx = 0, \quad (291)$$

sin necesidad de evaluar la integral; $|x| \sin(nx)$ es una función impar para todo n , y como la integral se efectúa sobre un dominio simétrico las contribuciones de ambos lados se anulan. En cambio,

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} x \cos(nx) dx - \int_{-\pi}^0 x \cos(nx) dx \right) = \frac{2(\cos(n\pi) - 1)}{\pi n^2}. \quad (292)$$

Finalmente, la serie trigonométrica de Fourier de g es dada por

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \cos(nx). \quad (293)$$

Para hallar el valor de las sumas, basta con observar que

$$g(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2}, \quad (294)$$

en virtud de los teoremas de convergencia puntual para las series de Fourier. Ahora, como $\cos(n\pi) = 1$ para n par, entonces cada término con n par de la suma se anula. Por tanto, podemos reescribir la igualdad como

$$g(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \quad (295)$$

Luego, reordenando los términos, vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - g(0) \right) = \frac{\pi^2}{8}. \quad (296)$$

De forma similar, la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad (297)$$

puede ser evaluada empleando el teorema de Parseval en su forma trigonométrica, calculado anteriormente en (285). De aquí que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^2}{\pi(2n+1)^4} \quad (298)$$

y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi}{16} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx - \frac{\pi^3}{2} \right) = \frac{\pi^4}{96}. \quad (299)$$

S.7

Como hemos visto anteriormente, el problema de encontrar la serie de Fourier de f se reduce a encontrar los coeficientes según (288). Para A_0 tenemos que

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}. \quad (300)$$

Luego, como f es una función par, el mismo argumento de (291) es suficiente para asegurar que

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0. \quad (301)$$

Para B_n , tenemos que

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4 \cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4}{n^2} (-1)^n. \quad (302)$$

Finalmente, la serie trigonométrica de Fourier para f es dada por

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx). \quad (303)$$

La suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (304)$$

puede evaluarse tomando

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad (305)$$

de forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} - f(0) \right) = \frac{\pi^2}{12}. \quad (306)$$

S.8

Para encontrar determinar la serie trigonométrica de Fourier de g , basta con tomar las fórmulas de (266) con $T = \pi$ y efectuar las integrales. Primero,

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx = \frac{\pi^2}{6}. \quad (307)$$

Luego, para A_n , tomando los cambios de variable $u = 2x$ y luego $\theta = u - \pi$, vemos que

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(2nx) dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} u(2\pi - u) \sin(nu) du \quad (308)$$

$$= \frac{(-1)^n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - \theta^2) \sin(n\theta) d\theta = 0, \quad (309)$$

debido al mismo argumento de paridad del integrando. Esto puede verse de manera geométrica observando que g es simétrica alrededor de $x = \pi/2$, y que sobre $(0, \pi)$ las funciones $\sin(2nx)$ son impares con respecto a $x = \pi/2$. Para B_n , tenemos

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n^2} \right) = -\frac{1}{n^2}. \quad (310)$$

Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de g sobre $(0, \pi)$ es dada por

$$g(x) \sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2nx). \quad (311)$$

La primera suma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (312)$$

puede evaluarse directamente tomando

$$g(0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (313)$$

Sin embargo, es de suma importancia proveer un argumento sólido de por qué es válido igualar el valor de la función justo en el extremo del dominio con su serie de Fourier. Por ejemplo, la serie de Fourier de $f(x) = x$ sobre $(0, 2\pi)$, calculada en (270), no converge puntualmente a f para $x = 0$ o $x = 2\pi$. En nuestro caso, podemos rescatar la convergencia puntual de la serie puesto que la extensión 2π -periódica de g , a pesar de no ser globalmente diferenciable, sí satisface una condición de Lipschitz globalmente (en esencia, que la función es continua y su derivada no tiende al infinito en ningún intervalo abierto). Por tanto, es legal escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - g(0) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (314)$$

De forma similar, pero sin tanto formalismo, la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (315)$$

puede evaluarse directamente usando el teorema de Parseval mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi} \left(-\pi \cdot \frac{\pi^4}{36} + \int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2 dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^5}{30} - \frac{\pi^5}{36} \right) = \frac{\pi^4}{90}. \quad (316)$$

S.9

De forma similar a los ejercicios anteriores, podemos encontrar la serie de Fourier trigonométrica planteando las integrales apropiadas para los coeficientes. Primero,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\pi^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} x dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 dx = 0. \quad (317)$$

Luego, para A_n ,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\pi^2 - x^2) \sin(nx) dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(nx) dx \quad (318)$$

$$= -\frac{2\pi^2 \cos(n\pi)}{n} + \frac{2(n^2\pi^2 - 6) \cos(n\pi)}{n^3} = -\frac{12 \cos(n\pi)}{n^3}. \quad (319)$$

Para B_n , se obtiene que

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\pi^2 - x^2) \cos(nx) dx = 0 \quad (320)$$

mediante un argumento de paridad. Finalmente, la serie trigonométrica de Fourier de f es dada por

$$f(x) \sim 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx). \quad (321)$$

La sumas a evaluar pueden obtenerse directamente usando el teorema de Parseval o aprovechando la convergencia puntual de la serie de Fourier. Evaluando en $x = \pi/2$, vemos que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (322)$$

Como $\sin(n\pi/2) = 0$ para n par, entonces

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^3} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(2n+1)^3} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}. \quad (323)$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{12} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{32}. \quad (324)$$

La otra suma puede ser obtenida aplicando el teorema de Parseval,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{12^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 (\pi^2 - x^2)^2 dx = \frac{1}{12^2 \pi} \cdot \frac{16\pi^7}{105} = \frac{\pi^6}{945}. \quad (325)$$

S.10

Al igual que en los casos anteriores, el problema de encontrar la serie trigonométrica de Fourier se reduce a encontrar los coeficientes usando las fórmulas para el producto interno. Sin embargo, tenga cuidado: es tentador querer aplicar los resultados sobre ortogonalidad que hemos obtenido hasta ahora, pero esto no es posible para f puesto que $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Primero,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x) dx = 0 \quad (326)$$

dado que para f es una función impar para todo α . Luego,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x) \sin(nx) dx \quad (327)$$

puede calcularse usando la forma exponencial del seno. En efecto, y usando la notación de (225) para ahorrar en escritura,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \langle \sin(\alpha x), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{4\pi} (\langle \phi_\alpha, \phi_n \rangle + \langle \phi_{-\alpha}, \phi_{-n} \rangle - \langle \phi_\alpha, \phi_{-n} \rangle - \langle \phi_{-\alpha}, \phi_n \rangle). \quad (328)$$

Como

$$\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \frac{e^{\pi i(a-b)} - e^{-\pi i(a-b)}}{i(a-b)} = \frac{2 \sin(\pi(a-b))}{a-b}, \quad (329)$$

para $a, b \notin \mathbb{Z}$, $a \neq b$, entonces

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(\pi(\alpha - n))}{\alpha - n} + \frac{\sin(\pi(\alpha - n))}{\alpha - n} - \frac{\sin(\pi(\alpha + n))}{\alpha + n} - \frac{\sin(\pi(\alpha + n))}{\alpha + n} \right]. \quad (330)$$

Reduciendo la expresión y simplificando, obtenemos

$$A_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \left[\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha - n} - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha + n} \right] = \frac{2n(-1)^{n+1} \sin(\pi\alpha)}{\pi(n^2 - \alpha^2)}. \quad (331)$$

Para B_n , podemos asegurar que

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x) \cos(nx) dx = 0 \quad (332)$$

mediante un argumento de paridad. Finalmente, la serie trigonométrica de Fourier de f es dada por

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1} \sin(\pi\alpha)}{n^2 - \alpha^2} \sin(nx). \quad (333)$$

Aplicando el teorema de Parseval a la serie, podemos ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - \alpha^2)^2} = \frac{\pi}{4 \sin^2(\pi\alpha)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\alpha x) dx = \frac{\pi}{4 \sin^2(\pi\alpha)} \left(\pi - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\alpha} \right) \quad (334)$$

$$= \frac{\pi^2}{4 \sin^2(\pi\alpha)} (1 - \operatorname{sinc}(2\pi\alpha)), \quad (335)$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - \alpha^2)^2} = \frac{\pi^2 \csc^2(\pi\alpha)}{4} - \frac{\pi \cot(\pi\alpha)}{4\alpha}. \quad (336)$$

S.11

Antes de abalanzarse a calcular los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier usando las fórmulas integrales, piense por un momento. ¿Cómo puede reescribirse $\sin^4(x)$?

$$\sin^4(x) = \frac{1}{16} (e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{1}{16} (6 - 4e^{-2ix} - 4e^{2ix} + e^{-4ix} + e^{4ix}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x). \quad (337)$$

Esta es la serie trigonométrica de Fourier de $\sin^4(x)$; de hecho

$$f(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx), \quad (338)$$

donde

$$A_0 = \frac{3}{8}, \quad A_n = 0, \quad (339)$$

y

$$B_n = 0, \quad n \neq 2, 4 \quad B_2 = -\frac{1}{2}, \quad B_4 = \frac{1}{8}. \quad (340)$$

S.12.A

Usualmente, una serie trigonométrica de Fourier está escrita en términos de funciones seno y coseno. Si usamos las fórmulas correspondientes para el dominio $[0, \pi]$, no hay razón para asumir que las integrales

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(2nx) dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(2nx) dx \quad (341)$$

deban anularse por alguna simetría de f . Entonces, ¿cómo es posible escribir una serie trigonométrica de Fourier para f donde sólo estén presentes términos de funciones seno o coseno, pero no ambos? La respuesta yace en que no es necesario construir una serie de Fourier para f sobre su dominio para que ella aproxime correctamente a f sobre dicho dominio.

Por ejemplo, si f está definida sobre un intervalo $D \subset \mathbb{R}$, es posible considerar una extensión de f , f^* , definida sobre un intervalo E tal que $D \subset E$, de forma que $f^*(x) = f(x)$ para $x \in D$; es decir, f y su extensión f^* coinciden sobre D y como consecuencia sus series de Fourier también, pero f^* es libre de tomar cualquier valor que nos convenga para $x \in E \setminus D$. Esta libertad es lo que utilizaremos para generar una serie de Fourier que coincida con f sobre $[0, \pi]$, pero que corresponda a una extensión impar o par de f según lo requiera el problema (funciones seno o coseno, respectivamente).

Para este inciso, consideremos una extensión impar de f sobre $[-\pi, \pi]$, f^* , dada por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ -f(-x), & -\pi \leq x < 0. \end{cases} \quad (342)$$

La serie de Fourier de f^* sobre $[-\pi, \pi]$ puede calcularse directamente sin problemas. Primero, y como f^* ha sido definida impar, obtenemos que

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f^*(x) dx = 0, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f^*(x) \cos(nx) dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (343)$$

Luego, y justamente aprovechando la paridad de f^* ,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f^*(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx. \quad (344)$$

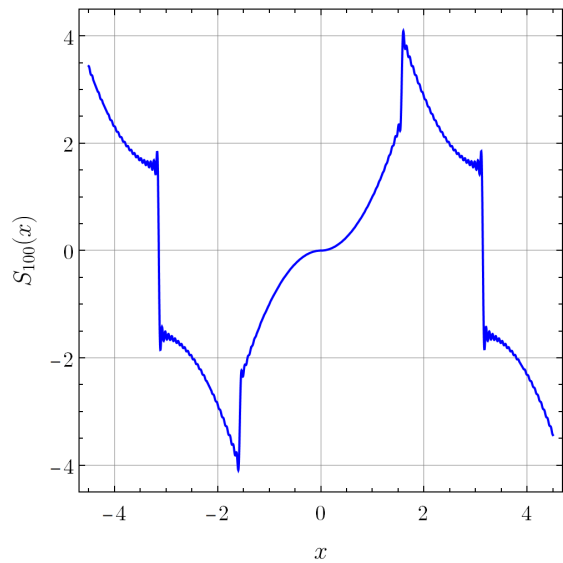
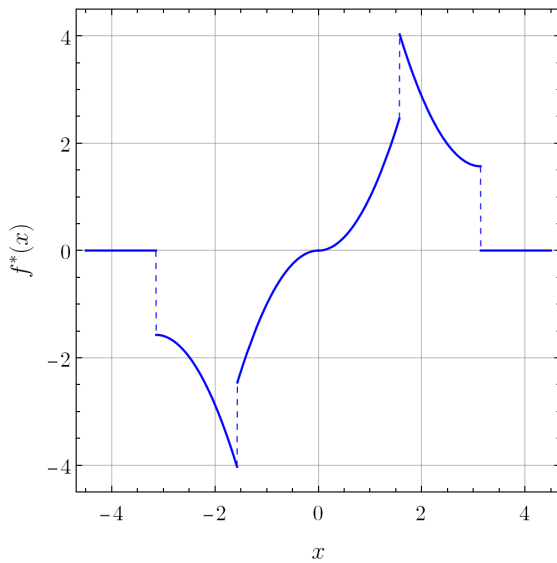
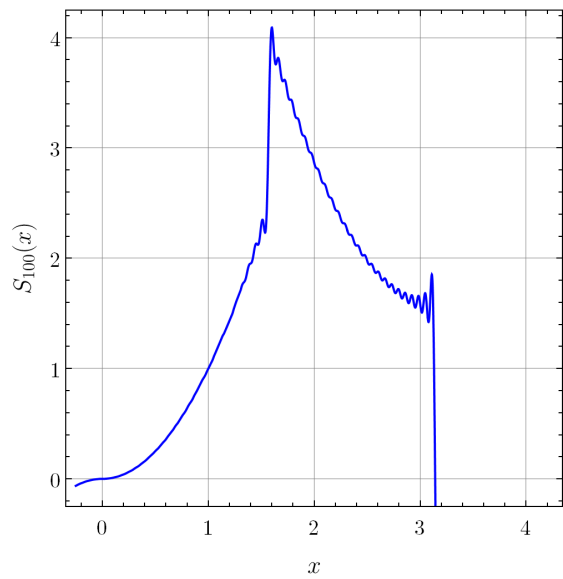
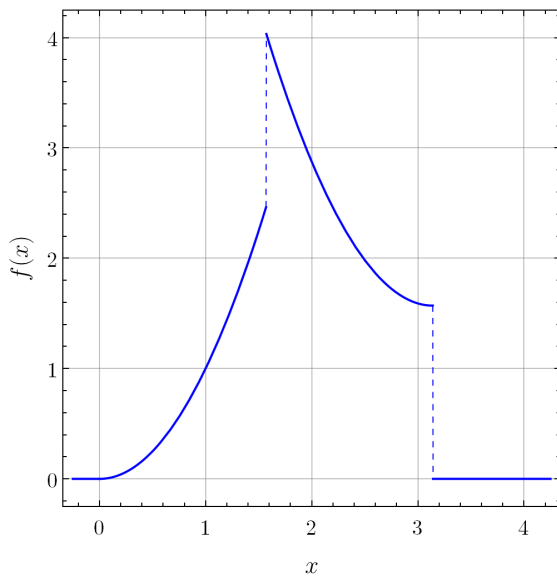
Después de una pizca de algebra evaluando la integral, obtenemos

$$A_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n (4 - \pi n^2) + \pi n^2 \cos(\pi n/2) + 4\pi n \sin(\pi n/2) - 4}{n^3} \right]. \quad (345)$$

Así, la serie trigonométrica de Fourier de f^* sobre $[-\pi, \pi]$ es dada por

$$f^*(x) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (4 - \pi n^2) + \pi n^2 \cos(\pi n/2) + 4\pi n \sin(\pi n/2) - 4}{n^3} \right] \sin(nx), \quad (346)$$

y por consiguiente, debido a que $f^*(x) = f(x)$ para $x \in [0, \pi]$, esta equivale a su serie trigonométrica de Fourier sobre $[0, \pi]$. Si este procedimiento aún no le convence, a continuación se muestran gráficas de f , f^* y la suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier que calculamos hasta 100 términos.



Al principio parecía una cuestión imposible, pero a través de la extensión f^* claramente podemos ver que la serie, incluso con tan solo 100 términos, aproxima muy bien a f sobre $[0, \pi]$. Sin embargo, note que en comparación con series anteriores esta requirió una gran cantidad de términos para mostrar una aproximación decente. ¿A qué cree que se debe esto?

S.12.B

En esencia, el procedimiento es idéntico solo que ahora debe considerarse una extensión *par* para asegurar que la serie trigonométrica de Fourier de la extensión de f solo posea términos en funciones coseno. Entonces, tomemos

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ f(-x), & -\pi \leq x < 0. \end{cases} \quad (347)$$

De forma similar al caso anterior, los coeficientes A_n se anulan debido a que f^* es par, y luego

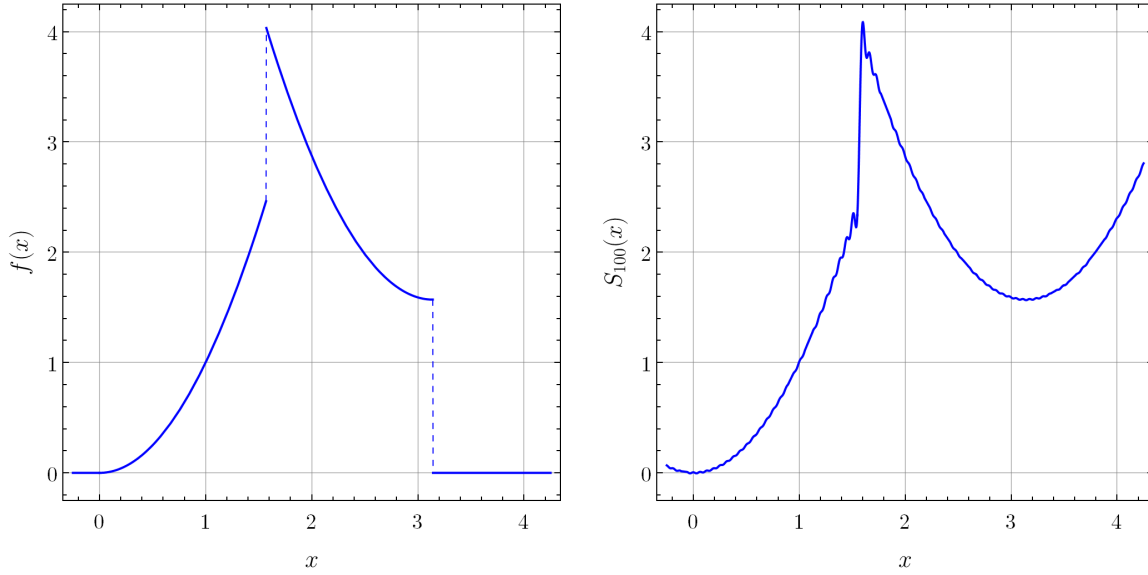
$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi(3+\pi)}{12}, \quad (348)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{4 \cos(\pi n/2) - n \sin(\pi n/2)}{n^2}. \quad (349)$$

Por tanto, la serie trigonométrica de Fourier de la extensión par de f es dada por

$$f^*(x) \sim \frac{\pi(3+\pi)}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos(\pi n/2) - n \sin(\pi n/2)}{n^2} \cos(nx), \quad (350)$$

y así, como vimos en el inciso anterior, esta serie de Fourier coincide con f sobre $[0, \pi]$.



S.13.A

Para ahorrar en escritura, defina

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}. \quad (351)$$

Las relaciones deseadas pueden encontrarse recordando que

$$\sin(\omega_n u) = \frac{e^{i\omega_n u} - e^{-i\omega_n u}}{2i}, \quad (352)$$

$$\cos(\omega_n u) = \frac{e^{i\omega_n u} + e^{-i\omega_n u}}{2}. \quad (353)$$

Así, y reemplazando en la serie trigonométrica,

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n u) + B_n \cos(\omega_n u) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{i\omega_n u} - e^{-i\omega_n u}}{2i} + B_n \frac{e^{i\omega_n u} + e^{-i\omega_n u}}{2} \quad (354)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (B_n - iA_n) e^{i\omega_n u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (B_n + iA_n) e^{-i\omega_n u}. \quad (355)$$

Comparando con la serie de Fourier exponencial,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n u}, \quad (356)$$

la primera suma corresponde a los términos exponenciales para $n \geq 1$, mientras que la segunda corresponde a aquellos con $n \leq -1$. Además, el término constante c_0 corresponde directamente con A_0 . Juntando ambos resultados, obtenemos que

$$c_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n), \quad (357)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. Resolviendo para A_n y B_n a partir de (357), llegamos a las fórmulas deseadas.

S.13.B

Ahora empiezan las cuentas interesantes. Si tomamos el cambio de variable $x = u - \varphi$, entonces la serie exponencial de Fourier para $f(u) = f(x + \varphi)$ se transforma según

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_n u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_n \varphi} e^{i\omega_n x}. \quad (358)$$

Luego, y utilizando las fórmulas que obtuvimos en el inciso anterior, los coeficientes de la serie exponencial para $f(x + \varphi)$ se relacionan con los de la serie trigonométrica mediante

$$A'_n = i(c_n e^{i\omega_n \varphi} - c_{-n} e^{-i\omega_n \varphi}), \quad (359)$$

$$B'_n = c_n e^{i\omega_n \varphi} + c_{-n} e^{-i\omega_n \varphi}, \quad (360)$$

$$A'_0 = c_0 = A_0. \quad (361)$$

Expandiendo la expresión para A'_n y simplificando, obtenemos

$$A'_n = i[c_n (\cos(\omega_n \varphi) + i \sin(\omega_n \varphi)) - c_{-n} (\cos(\omega_n \varphi) - i \sin(\omega_n \varphi))] \quad (362)$$

$$= \cos(\omega_n \varphi) \cdot i(c_n - c_{-n}) - \sin(\omega_n \varphi) \cdot (c_n + c_{-n}) \quad (363)$$

$$= \cos(\omega_n \varphi) \cdot A_n - \sin(\omega_n \varphi) \cdot B_n. \quad (364)$$

De forma similar,

$$B'_n = c_n (\cos(\omega_n \varphi) + i \sin(\omega_n \varphi)) + c_{-n} (\cos(\omega_n \varphi) - i \sin(\omega_n \varphi)) \quad (365)$$

$$= \cos(\omega_n \varphi) \cdot (c_n + c_{-n}) + \sin(\omega_n \varphi) \cdot i(c_n - c_{-n}) \quad (366)$$

$$= \cos(\omega_n \varphi) \cdot B_n + \sin(\omega_n \varphi) \cdot A_n. \quad (367)$$

En resumen, dados los coeficientes A_n , B_n y A_0 , los nuevos coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para $f(x + \varphi)$ vienen dados por

$$A'_0 = A_0, \quad (368)$$

$$A'_n = \cos(\omega_n \varphi) \cdot A_n - \sin(\omega_n \varphi) \cdot B_n, \quad (369)$$

$$B'_n = \sin(\omega_n \varphi) \cdot A_n + \cos(\omega_n \varphi) \cdot B_n. \quad (370)$$

Aunque estos resultados parezcan aburridos y sin sentido, realmente esconden una enorme utilidad. Incluso, si las fórmulas le son difíciles de recordar, éstas pueden resumirse de una forma elegante y a la vez esclarecedora.

En \mathbb{R}^2 , las rotaciones alrededor del origen son descritas por matrices R de la forma

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (371)$$

de manera que si $a \in \mathbb{R}^2$ denota un punto sobre el plano, entonces $R(\theta) \cdot a$ resulta en el punto a rotado θ radianes en sentido antihorario con respecto al origen. En nuestro caso particular, note que las fórmulas para A'_n y B'_n corresponden exactamente con una rotación del punto (A_n, B_n) de $\omega_n \varphi$ radianes. O, en otras palabras

$$\begin{bmatrix} A'_n \\ B'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_n \varphi) & -\sin(\omega_n \varphi) \\ \sin(\omega_n \varphi) & \cos(\omega_n \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = R(\omega_n \varphi) \cdot \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} \quad (372)$$

Esta transformación nos permite encontrar la serie de Fourier de funciones aprovechando sus simetrías alrededor de otros puntos distintos a $x = 0$. Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = g\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 \quad (373)$$

y suponga que se desea encontrar la serie de Fourier de la extensión 2π -periódica de f centrada en $3\pi/2$. En vez de realizar un tedioso proceso de extensión, prestando especial atención a los dominios y luego integrando con cuidado, podemos simplemente aprovechar el hecho de que f es simétrica alrededor de $x = 3\pi/2$. Trasladando el origen a $x = 3\pi/2$ mediante el cambio de variable

$$u = x - \frac{3\pi}{2}, \quad (374)$$

podemos calcular la serie de Fourier respecto a u sobre el nuevo dominio simétrico, luego transformar los coeficientes para la serie respecto a x según las fórmulas anteriores tomando

$$\varphi = -\frac{3\pi}{2}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{2\pi} = n. \quad (375)$$

En efecto, la serie de Fourier con respecto a u es dada por

$$g(u) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nu), \quad (376)$$

donde

$$A_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad A_n = 0, \quad B_n = \frac{2(-1)^n}{n^2}. \quad (377)$$

Luego, para calcular los coeficientes de la serie respecto a x solo basta con tomar el producto (372), de forma que

$$A'_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad A'_n = \sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) B_n, \quad B'_n = \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) B_n, \quad (378)$$

y por tanto la serie trigonométrica de Fourier de la extensión 2π -periódica deseada es dada por

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \left[\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \sin(nx) + \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \cos(nx) \right]. \quad (379)$$

Note que la expresión anterior puede reescribirse como

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos\left(nx - \frac{3\pi n}{2}\right), \quad (380)$$

que es precisamente equivalente a (376).

D.1

Como hemos visto anteriormente, lo único que necesitamos hacer es encontrar los coeficientes. Para A_0 ,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln(1+e^x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (381)$$

Para B_n , podemos asegurar que

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \cos(nx) dx = 0 \quad (382)$$

mediante un argumento de paridad, dado que f es impar; en efecto,

$$f(x) + f(-x) = -1 + \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = -1 + 1 = 0. \quad (383)$$

Para A_n , la situación es un poco más complicada: primero, veamos que

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \sin(nx) dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{1+e^{-x}} dx \quad (384)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{1+e^{-x}} dx. \quad (385)$$

Para integrar esta última expresión, definamos a F_n^- y F_n^+ según

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{1+e^{-x}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(nx)}{1+e^{-x}} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{1+e^{-x}} dx \quad (386)$$

$$= \frac{1}{\pi} (F_n^- + F_n^+). \quad (387)$$

La estrategia para integrar a F_n^- y F_n^+ es simple: aunque es muy probable que

$$\frac{\sin(nx)}{1+e^{-x}} \quad (388)$$

no posea una antiderivada elemental, es posible evaluar la integral representando el integrando en términos de una serie infinita. Consideremos primero a F_n^+ . Aplicando la expansión de Maclaurin de la serie geométrica a $1/(1+e^{-x})$ obtenemos

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kx}. \quad (389)$$

Mediante el criterio de Leibniz para series alternantes, vemos que la serie converge estrictamente para $x > 0$. Idealmente, tomaríamos el producto

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kx} \sin(nx) \quad (390)$$

e integraríamos término a término. Sin embargo, es necesario un pequeño paso intermedio para justificar el hecho de que la integral técnicamente no está definida para $x = 0$, puesto que la serie no converge en ese punto. Esto puede remediarse reemplazando la integral original por

$$F_n^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kx} \sin(nx) dx. \quad (391)$$

Como la serie se encuentra acotada por

$$\left| \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-kx} \right| \leq 1, \quad \forall N, x > 0, \quad (392)$$

el teorema de Convergencia Dominada garantiza que es posible intercambiar el signo integral con la sumatoria, de forma que

$$F_n^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kx} \sin(nx) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\epsilon}^{\pi} e^{-kx} \sin(nx) dx. \quad (393)$$

Así, las integrales

$$\int e^{-kx} \sin(nx) dx \quad (394)$$

pueden calcularse sin mucho problema. Procediendo con el cálculo, obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\epsilon}^{\pi} e^{-kx} \sin(nx) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} n e^{-k\pi} + e^{-k\epsilon} (k \sin(n\epsilon) + n \cos(n\epsilon))}{k^2 + n^2} \quad (395)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} n e^{-k\pi} + n}{k^2 + n^2} \quad (396)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} n e^{-k\pi} + n}{k^2 + n^2} \quad (397)$$

Luego de tomar el límite, podemos observar que la serie en efecto converge para todo n (ya sea empleando el criterio de Leibniz o un test de comparación). Por tanto

$$F_n^+ = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} n e^{-k\pi} + n}{k^2 + n^2}. \quad (398)$$

Para F_n^- el procedimiento es, en esencia, el mismo. Sin embargo, es importante recordar que la serie de (390) no converge para $x \leq 0$. Esto puede solucionarse observando que

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad (399)$$

de forma que la serie resultante es

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{(k+1)x}, \quad (400)$$

donde el dominio de convergencia es dado por $x < 0$. Usando argumentos similares a los anteriores para justificar el intercambio de la sumatoria con el signo integral, vemos que

$$F_n^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{-\pi}^{\epsilon} e^{(k+1)x} \sin(nx) dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^n n e^{-(k+1)\pi} - n}{(k+1)^2 + n^2} \quad (401)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{(n+1)} n e^{-k\pi} + n}{k^2 + n^2}. \quad (402)$$

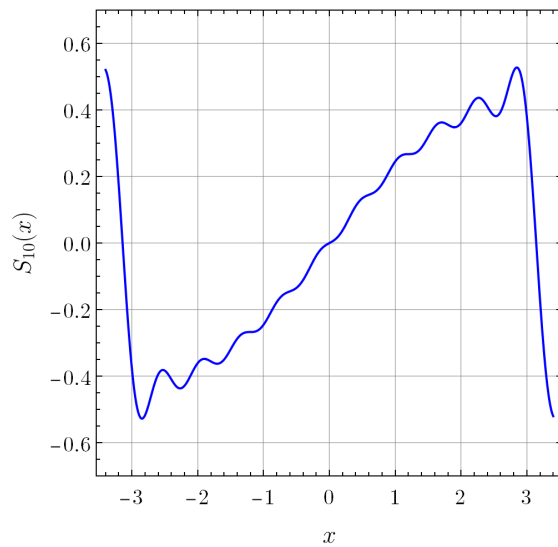
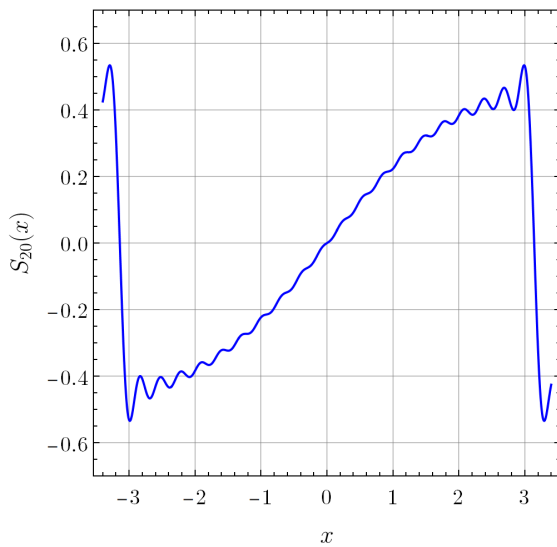
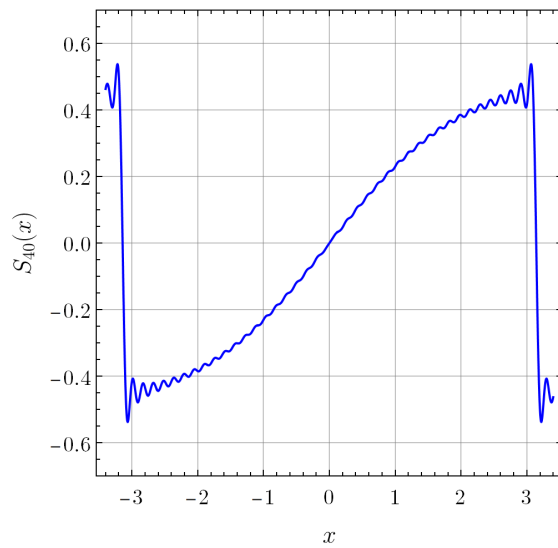
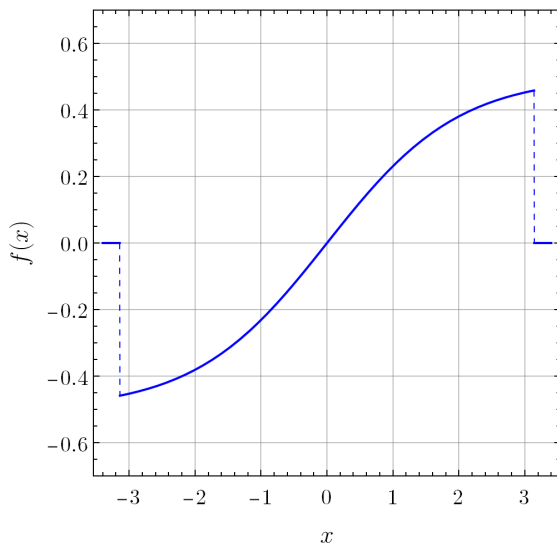
Observe como la sumatoria obtenida es idéntica a la de (398). Finalmente, juntando ambos resultados, obtenemos que

$$A_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} n e^{-k\pi} + n}{k^2 + n^2} \right]. \quad (403)$$

Es muy posible que haya notado la gran coincidencia que fue obtener la misma sumatoria al calcular F_n^- , a pesar de involucrar una expansión distinta. Esto no es ninguna coincidencia, sino un remanente de la simetría original de la integral; en particular, que

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) \sin(nx) dx. \quad (404)$$

A continuación se muestran gráficas de f y la suma parcial de su serie trigonométrica de Fourier hasta 40, 20 y 10 términos. Cabe destacar que, para graficar las sumas parciales, los coeficientes A_n se estimaron numéricamente efectuando la suma hasta el término $N = 200$.

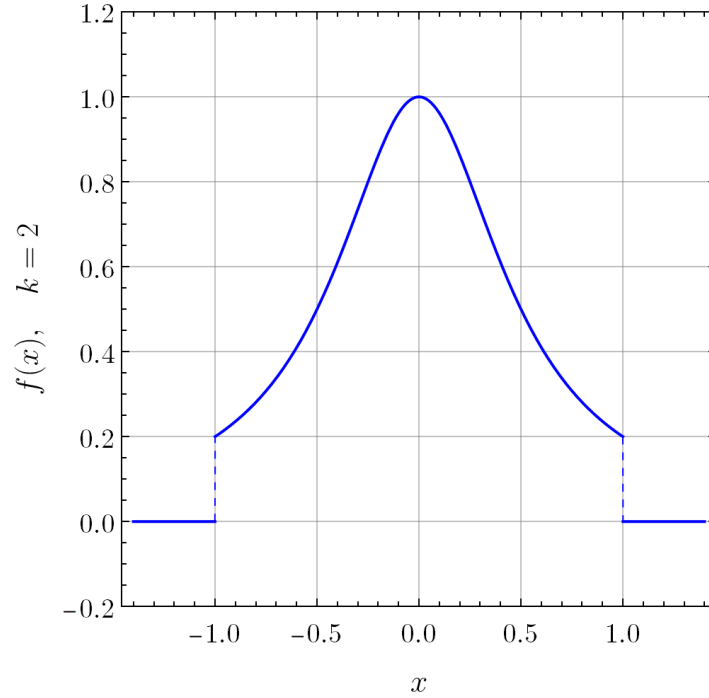


D.2

El ejercicio anterior fue el primero de una secuencia de problemas diseñada para ejercitar su creatividad al momento de evaluar integrales definidas. Este es el segundo. Como podrá haberse dado cuenta, la dificultad de encontrar una serie de Fourier es determinada por la complejidad de las integrales para cada uno de sus coeficientes. No pierda de vista las herramientas que ha desarrollado hasta ahora en los cursos anteriores; le serán de extrema utilidad. Considere

$$f(x) = \frac{1}{1+k^2x^2}, \quad -1 < x < 1, \quad (405)$$

donde $k \geq 0$.



Como f es una función par sobre $(-1, 1)$, podemos asegurar de antemano que

$$A_n = 0 \quad (406)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. Luego, según las fórmulas integrales del producto interno sobre $(-1, 1)$,

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+k^2x^2} dx = \frac{1}{2k} \int_{-k}^k \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{k} \arctan(k). \quad (407)$$

Ahora empieza la danza de las integrales: para B_n , tenemos

$$B_n = \int_{-1}^1 \frac{\cos(\pi nx)}{1+k^2x^2} dx. \quad (408)$$

al igual que para el caso anterior, no nos molestaremos en encontrar una antiderivada elemental para el integrando. No tiene caso; incluso si existiera, no la encontraría en un examen parcial. Procederemos a determinar los B_n en términos de series infinitas. Es conocido que

$$\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (409)$$

Por tanto,

$$\cos(\pi nx) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m} n^{2m}}{(2m)!} x^{2m}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (410)$$

Así, podemos reescribir la integral como

$$B_n = \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m} n^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{x^{2m}}{1+k^2x^2} dx. \quad (411)$$

Ahora, como la serie es convergente para todo x y está acotada según

$$\left| \sum_{m=0}^N \frac{(-1)^m \pi^{2m} n^{2m}}{(2m)!} x^{2m} \right| \leq e^{(\pi nx)^2}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, -1 \leq x \leq 1, \quad (412)$$

entonces el teorema de Convergencia Dominada nos permite extraer la sumatoria del signo integral y escribir

$$B_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m} n^{2m}}{(2m)!} \int_{-1}^1 \frac{x^{2m}}{1+k^2x^2} dx. \quad (413)$$

Concentrémonos ahora en las integrales

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2m}}{1+k^2x^2} dx. \quad (414)$$

Sea $u = \arctan(kx)$. Observe que u satisface las relación

$$\frac{1}{1+k^2x^2} = \frac{1}{k} u', \quad (415)$$

que es lo mismo que $u'(1+k^2x^2) = k$. Por tanto, u' satisface

$$x^2 u' = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} u'. \quad (416)$$

A partir de esta relación, podemos ver que

$$x^4 u' = \frac{x^2}{k} - \frac{1}{k^2} x^2 u' = \frac{x^2}{k} - \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} u'. \quad (417)$$

Siguiendo el mismo patrón, vemos que $x^6 u'$ satisface

$$x^6 u' = \frac{x^4}{k} - \frac{x^2}{k^3} + \frac{1}{k^5} - \frac{1}{k^6} u', \quad (418)$$

y que de forma similar

$$x^8 u' = \frac{x^6}{k} - \frac{x^4}{k^3} + \frac{x^2}{k^5} - \frac{1}{k^7} + \frac{1}{k^8} u'. \quad (419)$$

Aplicando inducción sobre m , no es difícil mostrar que

$$x^{2m} u' = \frac{(-1)^m}{k^{2m}} u' + \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{x^{2(m-j)}}{k^{2j-1}}. \quad (420)$$

En efecto, tomando (416) como caso base y suponiendo cierta la fórmula para $m-1$, consideremos

$$x^{2m} u' = x^2 \cdot x^{2(m-1)} u' = x^2 \left[\frac{(-1)^{m-1}}{k^{2(m-1)}} u' + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{x^{2(m-j-1)}}{k^{2j-1}} \right]. \quad (421)$$

Efectuando el producto, obtenemos

$$\frac{(-1)^{m-1}}{k^{2(m-1)}} x^2 u' + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{x^{2(m-j)}}{k^{2j-1}} = \frac{(-1)^m}{k^{2m}} u' + \frac{(-1)^{m-1}}{k^{2m-1}} + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{x^{2(m-j)}}{k^{2j-1}} \quad (422)$$

$$= \frac{(-1)^m}{k^{2m}} u' + \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{x^{2(m-j)}}{k^{2j-1}}. \quad (423)$$

Entonces, como

$$\frac{x^{2m}}{1+k^2x^2} = \frac{1}{k} x^{2m} u', \quad (424)$$

podemos reescribir la integral en términos de (420):

$$B_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m} n^{2m}}{(2m)!} \cdot \left(\frac{(-1)^m}{k^{2m+1}} \int_{-1}^1 u' dx + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{j+1}}{k^{2j}} \int_{-1}^1 x^{2(m-j)} dx \right). \quad (425)$$

Después de la danza integral, las expresiones resultantes son conocidas o triviales. Evaluando directamente,

$$\int_{-1}^1 u' dx = 2 \arctan(k), \quad y \quad \int_{-1}^1 x^{2(m-j)} dx = \frac{2}{2m - 2j + 1}. \quad (426)$$

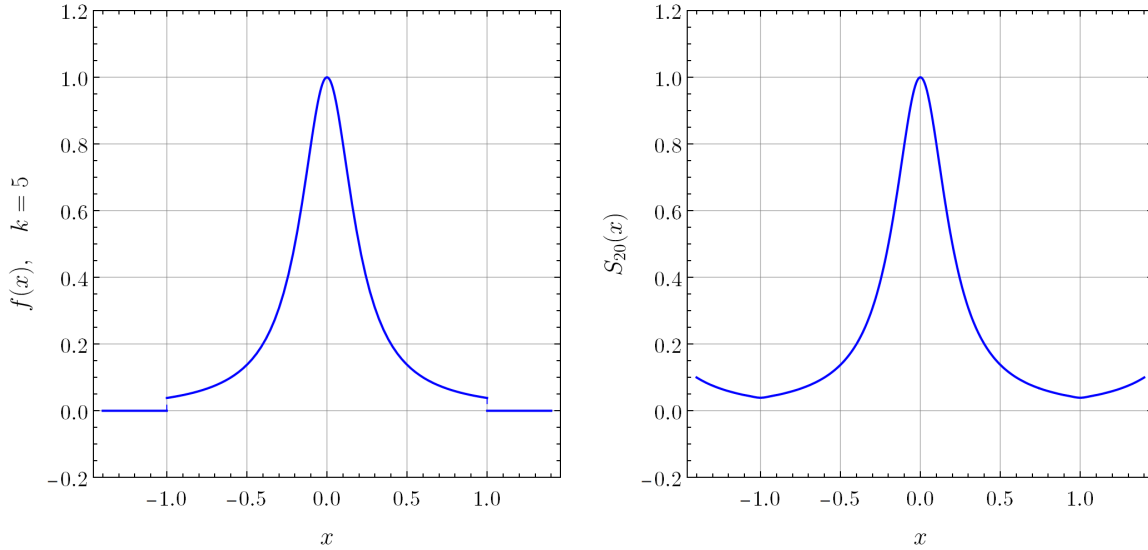
Finalmente, y realizando algunas simplificaciones,

$$B_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\pi^{2m} n^{2m}}{(2m)!} \cdot \left(\frac{\arctan(k)}{k^{2m+1}} + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{m+j+1}}{(2m - 2j + 1) k^{2j}} \right). \quad (427)$$

La serie trigonométrica de Fourier es dada entonces por

$$f(x) \sim \frac{1}{k} \arctan(k) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\pi n x), \quad (428)$$

donde los B_n son dados por (427). A continuación se muestran gráficas de f para $k = 5$ y la suma parcial de su serie trigonométrica de Fourier hasta 20 términos.



Como puede apreciar, incluso a 20 términos f y su aproximación mediante la serie de Fourier son casi indistinguibles.

D.3

Nuevamente, nos enfrentamos a una función cuya antiderivada, si es que posee una elemental, seguramente es extremadamente difícil de encontrar. Siguiendo el mismo orden de ideas que en el ejercicio anterior, debemos controlar nuestro impulso por hallar la antiderivada y conformarnos con hallar las integrales definidas que se nos presenten. Comencemos con A_0 . Vea que como f satisface

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{\alpha \sin(-x)}{1 - \alpha \cos(-x)}\right) = -\arctan\left(\frac{\alpha \sin(x)}{1 - \alpha \cos(x)}\right) = -f(x) \quad (429)$$

entonces es impar. Así, podemos asegurar de antemano que $A_0 = 0$ y que $B_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Por tanto, solo debemos concentrarnos en

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arctan\left(\frac{\alpha \sin(x)}{1 - \alpha \cos(x)}\right) \sin(nx) dx. \quad (430)$$

Primero, definamos

$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \quad |\beta| > 1, \quad (431)$$

de modo que

$$\arctan\left(\frac{\alpha \sin(x)}{1 - \alpha \cos(x)}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\beta - \cos(x)}\right). \quad (432)$$

Ahora, como

$$D\left[\arctan\left(\frac{\sin(x)}{\beta - \cos(x)}\right) \cos(nx)\right] = \frac{\beta \cos x - 1}{(\beta - \cos x)^2 + \sin^2 x} \cos(nx) - n \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\beta - \cos(x)}\right) \sin(nx), \quad (433)$$

aplicando integración por partes obtenemos

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta \cos x - 1}{(\beta - \cos x)^2 + \sin^2 x} \cos(nx) dx \quad (434)$$

dado que

$$\arctan\left(\frac{\sin(x)}{\beta - \cos(x)}\right) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (435)$$

Expandiendo el denominador del integrando,

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta \cos x - 1}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos^2 x} \cos(nx) dx. \quad (436)$$

Note que la expresión

$$\frac{\beta \cos x - 1}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos^2 x} \quad (437)$$

es par. Esto nos permite reescribir (436) como

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta \cos x - 1}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos^2 x} e^{inx} dx. \quad (438)$$

Y ahora, el golpe de gracia. Un patrón que debe aprender a reconocer rápidamente es que las integrales de la forma

$$\int f(\cos(x), \sin(x)) dx \quad (439)$$

pueden transformarse en integrales del tipo

$$\int \frac{2}{1+u^2} f\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) du \quad (440)$$

mediante el famoso *Cambio Universal* o *Cambio de Weierstrass*; es decir, bajo este cambio las funciones trigonométricas en x se transforman en funciones racionales de u . Sin embargo, hay algo más: dada la naturaleza del cambio,

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad (441)$$

las integrales respecto a x que se efectúan sobre $(-\pi, \pi)$ se tornan integrales respecto a u sobre $(-\infty, \infty)$. Aunque esto parezca complicar el asunto, lo que realmente hace es darnos un camino directo para evaluar la integral mediante la *integración de contorno* (si aún no lo ha hecho, ahora es un buen momento para refrescar el contenido de matemáticas VI). Bajo el cambio (441), obtenemos que

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad e^{ix} = \frac{1+iu}{1-iu}, \quad (442)$$

y por tanto podemos reescribir la integral una vez más como

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{2}{1+u^2} \cdot \frac{\beta(1-u^2) - (1+u^2)}{(1+\beta^2)(1+u^2) - 2\beta(1-u^2)} du \quad (443)$$

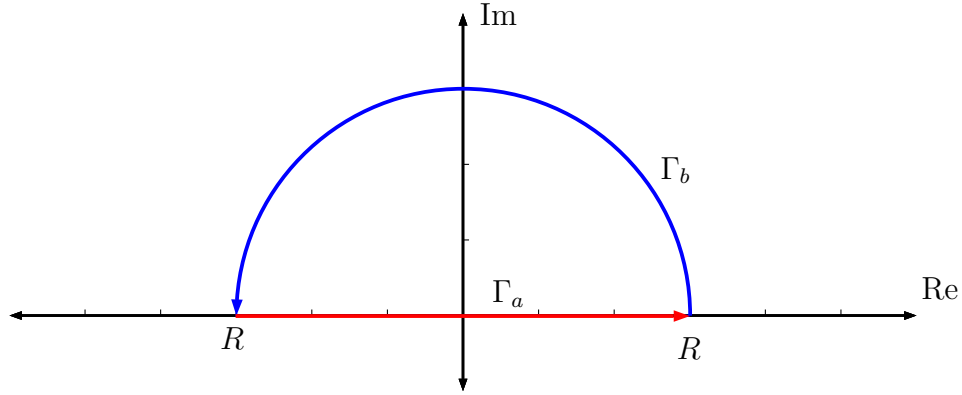
$$= \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{(\beta-1) - (\beta+1)u^2}{(\beta+1)^2u^2 + (\beta-1)^2} du \quad (444)$$

$$= \frac{2}{n\pi(\beta+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du, \quad (445)$$

donde

$$\gamma = \frac{\beta-1}{\beta+1} > 0, \quad \text{dado que } |\beta| > 1. \quad (446)$$

A partir de esta forma compacta para la integral, obtener su valor es ahora cuestión de técnica. Considere una curva cerrada semicircular $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$ sobre el plano complejo, definida según la gráfica siguiente:



Así, tenemos que

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du = \int_{-R}^R \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du + \int_{\Gamma_b} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du \quad (447)$$

Note que esta integral es válida dado que el integrando no posee singularidades sobre la recta real. Ahora, debemos justificar que la integral sobre el semicírculo tiende a 0 a medida que $R \rightarrow \infty$. Como

$$\left| \frac{1+iu}{1-iu} \right|^n \cdot \left| \frac{1}{1+u^2} \right| \cdot \left| \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} \right| \leq \frac{1}{1+|u|^2} \cdot \frac{\gamma+|u|^2}{\gamma^2+|u|^2}, \quad (448)$$

entonces el *lema de estimación* (también conocido como la *desigualdad ML*) garantiza que

$$\left| \int_{\Gamma_b} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du \right| \leq \frac{1}{1+R^2} \cdot \frac{\gamma+R^2}{\gamma^2+R^2} \cdot \pi R \rightarrow 0, \quad (449)$$

a medida que $R \rightarrow \infty$. Por lo tanto, obtenemos la tan deseada igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du, \quad (450)$$

y podemos proceder a evaluar la integral del miembro derecho empleando el teorema del residuo. Note que el integrando

$$h(u) = \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} \quad (451)$$

posee singularidades en $u = \pm i$ y $u = \pm i\gamma$. Como la integral sobre Γ se efectúa en el semiplano $\text{Im}(u) \geq 0$, entonces según el teorema del residuo la integral queda determinada por

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\gamma-u^2}{\gamma^2+u^2} du = 2\pi i (\text{Res}(h; i) + \text{Res}(h; i\gamma)). \quad (452)$$

Después de intensos cálculos, omitidos para ahorrar en escritura, se obtienen los residuos en cuestión como

$$\text{Res}(h; i) = 0, \quad \text{Res}(h; i\gamma) = \frac{(1-\gamma)^n}{(1+\gamma)^n} \cdot \frac{1}{(1-\gamma)2i}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (453)$$

Juntando los resultados de vuelta,

$$A_n = \frac{2}{n\pi(\beta+1)} \cdot \left(\frac{(1-\gamma)^n}{(1+\gamma)^n} \cdot \frac{\pi}{(1-\gamma)} \right) = \frac{2}{n(\beta+1)} \left(\frac{\beta+1}{2\beta^n} \right) = \frac{1}{n\beta^n}. \quad (454)$$

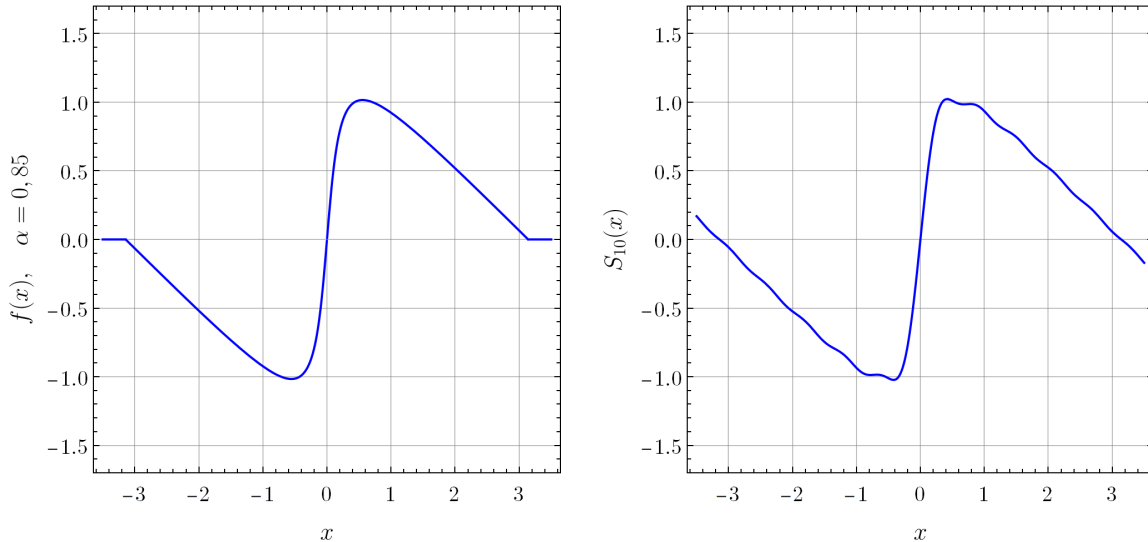
Finalmente, y después de todo ese trabajo, obtenemos

$$A_n = \frac{\alpha^n}{n}, \quad (455)$$

y con A_n , la serie trigonométrica de Fourier de f ,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \sin(nx). \quad (456)$$

A continuación se muestran gráficas de f y la suma parcial de su serie trigonométrica de Fourier para $\alpha = 0,85$ hasta 10 términos.



E.1.A

Puede mostrarse que las funciones P_n son mutuamente ortogonales respecto al producto interno dado empleando un procedimiento similar al de (231). Primero, sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n \neq m$, $n > m$. Partiendo de la definición de las P_n , y siguiendo la sugerencia, considere

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m + n(n+1)P_n P_m = 0, \quad (457)$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] P_n + m(m+1)P_m P_n = 0. \quad (458)$$

Restando ambas expresiones obtenemos que

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m - \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] P_n + [n(n+1) - m(m+1)] P_n P_m = 0. \quad (459)$$

Para ahorrar en escritura, definamos $C_{nm} = n(n+1) - m(m+1)$. Luego, integrando de -1 a 1 ,

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m dx - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] P_n dx + C_{nm} \int_{-1}^1 P_n P_m = 0. \quad (460)$$

Ahora, note algo muy interesante: aplicando integración por partes a las integrales de la forma

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m dx \quad (461)$$

obtenemos

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P_m \frac{dP_n}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m + (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx}, \quad (462)$$

de manera que

$$(1-x^2) P_m \frac{dP_n}{dx} \Big|_{-1}^1 = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m dx + \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} dx. \quad (463)$$

Sin embargo, note además que el miembro izquierdo de esta expresión es cero, puesto que el factor $(1-x^2)$ se anula para $x = \pm 1$. Así,

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] P_m dx = - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} dx. \quad (464)$$

Reescribiendo las dos integrales de (460) usando el mismo procedimiento, obtenemos exactamente la misma integral en ambos casos. Finalmente, sustituyendo y restando,

$$- \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} dx + \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} dx + C_{nm} \int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0, \quad (465)$$

$$C_{nm} \int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0. \quad (466)$$

Pero como C_{nm} es distinto de cero, entonces se sigue que

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0, \quad n \neq m; \quad (467)$$

es decir, los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales entre sí respecto al producto interno dado.

E.1.B

Conceptualmente, el procedimiento para determinar los coeficientes de la expansión en polinomios de Legendre es idéntico al que usamos para las series de Fourier. Ambos reposan fundamentalmente sobre la ortogonalidad de las funciones que componen la expansión. Entonces, calculando según la fórmula dada en (32) para los coeficientes, vemos que

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad (468)$$

puesto que f es impar, y luego

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (469)$$

Sustituyendo la expresión dada para $P_k(x)$ en la integral, obtenemos

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \binom{k+n}{n} \int_{-1}^1 f(x) \left(\frac{x-1}{2}\right)^n dx. \quad (470)$$

La integral resultante puede ser evaluada directamente como

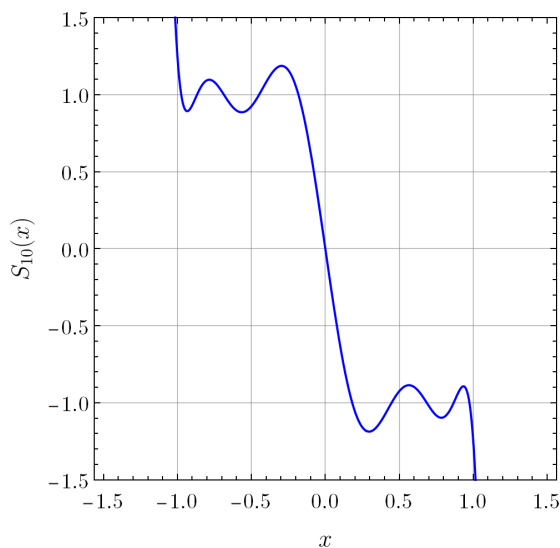
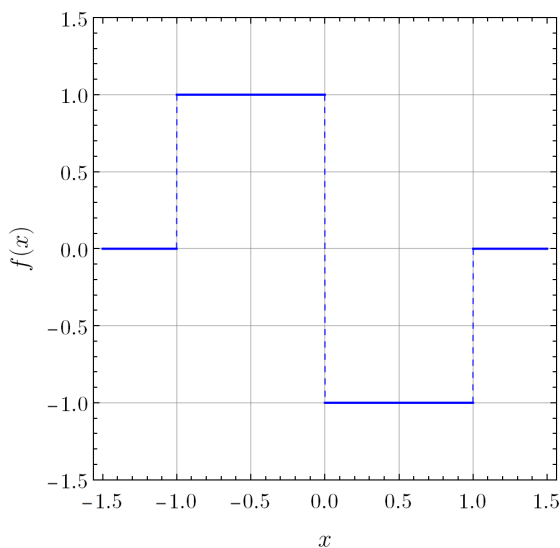
$$\int_{-1}^1 f(x) \left(\frac{x-1}{2}\right)^n dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{x-1}{2}\right)^n dx - \int_0^1 \left(\frac{x-1}{2}\right)^n dx \quad (471)$$

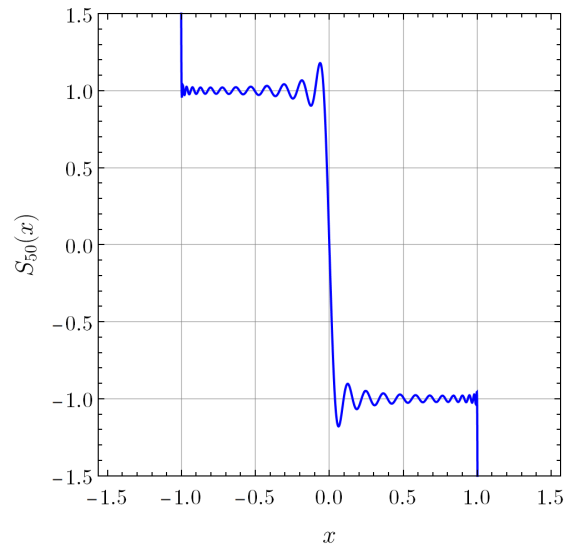
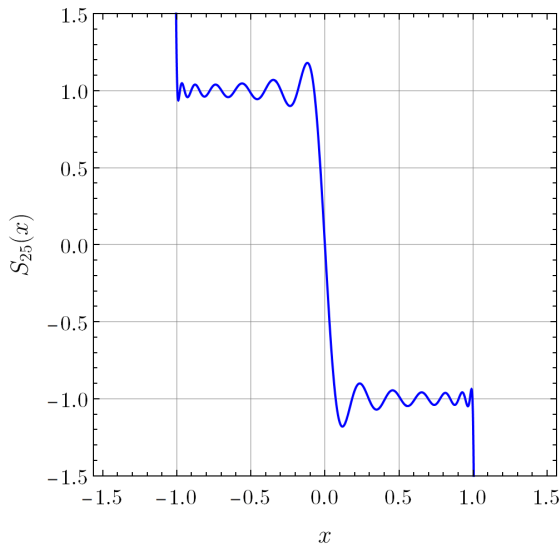
$$= \frac{(-1)^{n+1} (2 - 2^{n+1})}{2^n (n+1)}, \quad (472)$$

y por tanto,

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \binom{k+n}{n} \frac{(-1)^{n+1} (2 - 2^{n+1})}{2^n (n+1)}. \quad (473)$$

A continuación, y para satisfacer su deseo interno de saber si esta expansión realmente funciona o si todo es una vil mentira, se muestran gráficas de f y la suma parcial de su expansión en polinomios de Legendre hasta 10, 25 y 50 términos.





Los polinomios de Legendre aparecen de forma natural en muchos problemas de Física, como las expansiones de potenciales electrostáticos y gravitatorios de la forma r^{-1} o en la solución de la ecuación de Schrödinger con fuerza central en coordenadas esféricas. Aunque las series de Fourier son más comunes en aplicaciones de ingeniería, las expansiones en polinomios de Legendre dejan en claro que no estas son una excepción especial, sino la manifestación de un conjunto de propiedades que juntas permiten a una familia de funciones aproximar a otra función sobre un intervalo dado.

Ecuaciones en Derivadas Parciales

T.1.A

Existen al menos dos formas de razonar este problema: una estrictamente analítica y una geométrica. Primero, veamos el camino analítico. Consideremos

$$f(x, y) = f(s(x, y)), \quad (474)$$

de forma que

$$\partial_x f = \partial_s f \cdot \partial_x s, \quad \partial_y f = \partial_s f \cdot \partial_y s. \quad (475)$$

Así, reemplazando en (37), obtenemos

$$\nabla_{\mathbf{u}} f = a \cdot f_x + b \cdot f_y = \partial_s f (a \cdot \partial_x s + b \cdot \partial_y s). \quad (476)$$

En la expresión anterior vemos que $\partial_s f$ es un factor común, y por tanto si escogemos apropiadamente a s tal que

$$a \cdot \partial_x s = -b \cdot \partial_y s, \quad (477)$$

entonces $\nabla_{\mathbf{u}} f = 0$ se satisfará. Afortunadamente, como a y b son constantes, (477) puede resolverse simplemente haciendo que

$$\partial_x s = -b, \quad \partial_y s = a, \quad (478)$$

y de aquí que

$$s = ay - bx + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (479)$$

De esta manera, obtenemos que cualquier función $f = f(ay - bx + c)$ es solución de (37), siempre que sus derivadas parciales existan. Ahora, veamos que este problema posee una interesante interpretación geométrica: en esencia, el problema en cuestión es encontrar un campo escalar $f = f(x, y)$ tal que su derivada direccional sobre $\mathbf{u} = (a, b)$ se anule. Si su derivada direccional se anula, entonces f ha de ser constante a lo largo de alguna dirección en el plano; en particular, sobre infinitas rectas, todas en la dirección de $\mathbf{u} = (a, b)$. Estas rectas sobre el plano tienen justamente la forma

$$ay - bx + c = C, \quad \text{para } C \text{ arbitraria,} \quad (480)$$

y por tanto, cualquier función f definida por $f = f(ay - bx + c)$ posee derivada direccional nula sobre puesto que entonces $f = f(C)$; es decir, una constante.

T.1.B

Para resolver el problema de valor de frontera, recordemos que cualquier función de la forma $f = f(ay - bx + c)$ es válida. Esto es al mismo tiempo una bendición y una maldición, porque tanto expresiones como $(ay - bx + c)^{20}$ como $\cot(ay - bx + c)$ son soluciones válidas de (37), siempre que se esté sobre del dominio de la función y sus derivadas parciales estén definidas. $f(x, 0)$ parece tener una forma polinómica de grado 2, así que nuestra mejor opción por ahora es intentar completar la expresión a términos de la forma $(ay - bx)^n$, $n = 1, 2$. Consideremos

$$f(x, y) = k_1(ay - bx) + k_2(ay - bx)^2, \quad (481)$$

donde k_1 y k_2 son constantes reales a determinar. Tomando $y = 0$ e igualando término a término, vemos que

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -\frac{1}{2}. \quad (482)$$

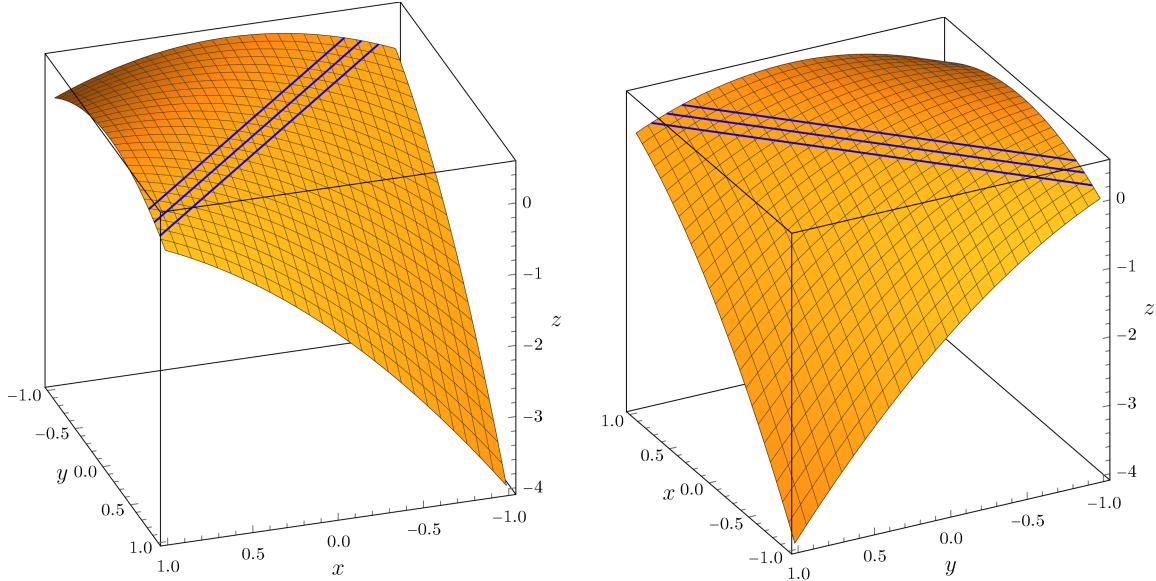
Así, $f = f(x, y)$ es dada por

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}(ay - bx)^2 - (ay - bx), \quad (483)$$

satisface tanto la ecuación diferencial como la condición

$$f(x, 0) = bx - \frac{1}{2}b^2x^2. \quad (484)$$

A continuación se muestra una gráfica de $z = f(x, y)$ para $a = 1$, $b = 1$, y varias rectas sobre la superficie de la gráfica de z sobre las cuales $f(x, y)$ es constante, según vimos en el problema.



T.2

A pesar de que éstas no son ecuaciones en derivadas parciales, resolver este problema y tener sus soluciones frescas en la memoria nos será de gran utilidad luego al transformar una EDP en varias EDOs usando separación de variables. Veamos la primera ecuación: este es el problema clásico de la función exponencial, y su solución general es ampliamente conocida como

$$f(x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (485)$$

La segunda ecuación también es muy conocida. El *problema del oscilador armónico* es ubicuo en la física y la ingeniería, pero a diferencia de la anterior sus soluciones generales requieren un poco más de cuidado. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

- Caso $\lambda = 0$:

La ecuación (40) toma la forma

$$D^2 f = 0 \quad (486)$$

y así, la solución general para $\lambda = 0$ es dada por

$$f(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (487)$$

- Caso $\lambda^2 > 0$:

Aquí, obtenemos propiamente el problema del oscilador armónico, cuya solución general es dada por

$$f(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (488)$$

- Caso $\lambda^2 < 0$:

Para $\lambda^2 < 0$, la solución general es similar a (488), pero reemplazando a las funciones trigonométricas por sus respectivas formas hiperbólicas, tal que si $\lambda^2 = -\mu^2$, con $\mu > 0$, entonces:

$$f(x) = A \sinh(\mu x) + B \cosh(\mu x), \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (489)$$

S.1

Empleando separación de variables, considere

$$f(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (490)$$

Así, (41) puede expresarse como

$$\Omega \cdot \partial_t \Gamma - \alpha \Gamma \cdot \partial_x^2 \Omega = 0. \quad (491)$$

Ahora, en algunas clases o textos de matemáticas VII se procede con la separación de variables a partir de la ecuación anterior dividiendo por f , y reescribiendo como

$$\frac{\partial_t \Gamma}{\alpha \Gamma} = \frac{\partial_x^2 \Omega}{\Omega}. \quad (492)$$

Sin embargo, en esta guía usaremos un método ligeramente distinto pero completamente equivalente que consiste en proponer que Γ y Ω sean autofunciones de los operadores diferenciales D y D^2 ; es decir, que Γ y Ω satisfagan

$$D\Gamma + \mu\Gamma = 0, \quad \text{y} \quad D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0. \quad (493)$$

Así, (41) puede satisfacerse si μ y λ se relacionan mediante

$$\mu - \alpha\lambda^2 = 0. \quad (494)$$

Observe que esta relación no es mera coincidencia, sino que es consecuencia de reemplazar (493) en (491) y factorizar f . Este conjunto de ecuaciones es equivalente al obtenido siguiendo un procedimiento como el descrito en (492). Sin embargo, luego veremos que plantear la ecuación diferencial parcial en términos de autofunciones nos provee con un entendimiento más rico de la situación; las soluciones a nuestro problema no son aquellas funciones que *casualmente* satisfacen (41), sino *precisamente* aquellas que son autofunciones del operador diferencial que describe a la EDP. En efecto, si

$$L = \partial_t - \alpha \nabla^2, \quad (495)$$

entonces vemos que cualquier función $f(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t)$ es una autofunción de L siempre que Ω y Γ satisfagan (493), con autovalor $(\mu - \alpha\lambda^2)$, pues se verifica que

$$Lf + (\mu - \alpha\lambda^2)f = -\Omega(x)\Gamma(t)(\mu - \alpha\lambda^2) + \Omega(x)\Gamma(t)(\mu - \alpha\lambda^2) = 0. \quad (496)$$

Luego veremos más ejemplos de esto en otras ecuaciones. Por el momento, concentrémonos en encontrar la solución genérica acotada para $t > 0$. En el ejercicio anterior determinamos las soluciones generales para (493). Así, y en virtud de (485), obtenemos que

$$\Gamma(t) = e^{-\mu t} = e^{-\alpha\lambda^2 t}. \quad (497)$$

Como la solución deseada debe ser acotada para $t > 0$, entonces $\mu \geq 0$ y por consiguiente $\lambda^2 \geq 0$. Esta condición que hemos obtenido sobre λ (y que veremos luego en muchos otros ejercicios) tiene un significado

muy importante: nos permite determinar cuáles soluciones de (40) son apropiadas para Ω . Exploremos primero el caso $\lambda^2 > 0$: en virtud de (488), Ω es dada por

$$\Omega(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (498)$$

Juntando ambos resultados, obtenemos que

$$e^{-\alpha\lambda^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] \quad (499)$$

es una solución de (41). Para el caso $\lambda = 0$, (487) indica que,

$$\Omega(x) = C + Dx, \quad C, D \in \mathbb{R}. \quad (500)$$

Sin embargo, esta expresión no es acotada para C y D cualesquiera. Para que Ω sea acotada en este caso, se debe cumplir que $D = 0$. De esta manera, obtenemos otra solución acotada (aunque bastante aburrida) dada por

$$g(x, t) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (501)$$

Finalmente, la solución genérica es simplemente una combinación lineal de ambas soluciones:

$$f(x, t) = C + e^{-\alpha\lambda^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)], \quad A, B, C \in \mathbb{R}. \quad (502)$$

A pesar de que esta es, en el sentido riguroso de la palabra, la solución genérica al problema en cuestión, en casos similares (501) es de poco interés (posiblemente porque describa procesos físicos triviales o estados de equilibrio) y se suele denominar a (499) como la solución genérica. Luego veremos como la solución constante puede incorporarse a soluciones generales en términos de series como un caso particular de (499).

S.2

Para la ecuación de onda, el procedimiento es exactamente el mismo. En esencia, encontraremos las autofunciones al operador diferencial

$$L = \partial_t^2 - c^2 \nabla^2. \quad (503)$$

Considere

$$\phi(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (504)$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$\Omega \cdot \partial_t^2 \Gamma - c^2 \Gamma \cdot \partial_x^2 \Omega = 0. \quad (505)$$

Por tanto, si Ω y Γ satisfacen

$$D^2 \Omega + \lambda^2 \Omega = 0, \quad D^2 \Gamma + \mu^2 \Gamma = 0, \quad (506)$$

entonces, y siguiendo el mismo patrón que en el ejercicio anterior, ϕ es solución de (44) siempre que

$$\mu^2 - c^2 \lambda^2 = 0. \quad (507)$$

Ahora, exploremos los posibles valores de λ que admiten soluciones acotadas para ϕ . Al igual que en el ejercicio anterior, el caso $\lambda = 0$ arroja una solución a la ecuación diferencial de la forma

$$C + Dx + Et + Fxt, \quad (508)$$

donde C , D , E y F son constantes reales, que solo puede ser acotada para todo x , t si $D = E = F = 0$. Nuevamente, y a pesar de ser una solución válida a (44), no es de mucho interés. Consideremos ahora el caso $\lambda \geq 0$. Como hemos visto anteriormente, este caso corresponde a soluciones para Ω y Γ de la forma

$$\Omega(x) = a_1 \sin(\lambda x) + b_1 \cos(\lambda x), \quad \Gamma(t) = a_2 \sin(\lambda ct) + b_2 \cos(\lambda ct). \quad (509)$$

Efectuando el producto, la solución puede escribirse de manera concisa como

$$\sin(\lambda x) [A_1 \sin(\lambda ct) + B_1 \cos(\lambda ct)] + \cos(\lambda x) [A_2 \sin(\lambda ct) + B_2 \cos(\lambda ct)]. \quad (510)$$

Así, la solución genérica que buscamos es dada por

$$\phi(x, t) = C + \sin(\lambda x) [A_1 \sin(\lambda ct) + B_1 \cos(\lambda ct)] + \cos(\lambda x) [A_2 \sin(\lambda ct) + B_2 \cos(\lambda ct)]. \quad (511)$$

Otra vez, observamos que las autofunciones son el alma del método de separación de variables.

S.3

A partir de este ejercicio comenzaremos a explorar problemas más concretos usando separación de variables. Procediendo como es usual, considere

$$f(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (512)$$

Sustituyendo, obtenemos que si

$$D\Gamma + \mu\Gamma = 0, \quad \text{y} \quad D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0, \quad (513)$$

entonces f es solución de la ecuación en cuestión siempre que

$$\mu - \alpha\lambda^2 = 0. \quad (514)$$

Es en este momento, y a diferencia de los ejercicios anteriores, cuando debemos empezar a incorporar las condiciones que ha de satisfacer f sobre la frontera del dominio de la solución. Estas condiciones, junto a la ecuación diferencial, constituyen el *problema de valor inicial* al que está sometida f . También, y pesar de la rigurosidad y el tecnicismo, es momento de que empecemos a encontrar razonamientos físicos a los problemas que presentaremos de aquí en adelante, pues serán de gran ayuda al momento de interpretarlos a ellos y sus soluciones.

Este problema en particular, que involucra la ecuación de calor sobre una región acotada en la variable espacial x , trata sobre la evolución temporal del perfil de temperatura de una barra unidimensional homogénea dispuesta sobre $[0, L]$ para cierto valor del parámetro α . Luego veremos como este parámetro, denominado la *difusividad térmica*, es parte crucial del problema y sirve para cuantificar la rapidez con la que la temperatura se “esparce” sobre la barra y eventualmente alcanza el equilibrio. Una vez resuelto el problema de valor inicial, entenderemos cómo sucede esto exactamente. Por ahora, sigamos con el procedimiento.

Según el enunciado,

$$f(0, t) = f(L, t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t > 0. \quad (515)$$

Como la relación se satisface para todo t , entonces ha de satisfacerse para todo $\Gamma(t)$. Así, vemos que

$$\Omega(0) = \Omega(L) = 0. \quad (516)$$

Ahora, según (513), Γ es de la forma

$$e^{-\mu t}, \quad (517)$$

y además, como f debe ser acotada, $\mu \geq 0$ y por tanto $\lambda^2 \geq 0$. Siguiendo el mismo procedimiento de los ejercicios anteriores, exploraremos las posibles soluciones Ω para $\lambda^2 \geq 0$, pero ahora añadiendo la condición de que $\Omega(0) = \Omega(L) = 0$. Si tomamos $\lambda = 0$, la solución correspondiente es de la forma

$$C + Dx, \quad C, D \in \mathbb{R}. \quad (518)$$

Evaluando la expresión en $x = 0$ y $x = L$ obtenemos que $C = D = 0$, y la única solución admitida para $\lambda = 0$ es la trivial, $\Omega(x) = 0$. Consideremos ahora $\lambda^2 > 0$. Las soluciones correspondientes son de la forma

$$A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (519)$$

Evaluando en $x = 0$ obtenemos

$$A \sin(0) + B \cos(0) = B = 0. \quad (520)$$

Luego, tomando $x = L$,

$$A \sin(\lambda L) = 0. \quad (521)$$

Aquí debemos calcular con cuidado. Tanto A como $\sin(\lambda L)$ pueden ser cero, pero $A = 0$ solo resulta en una solución trivial. Concentrémonos entonces en la ecuación

$$\sin(\lambda L) = 0. \quad (522)$$

La función seno se anula para todo múltiplo entero de π . Así,

$$\sin(\lambda L) = 0, \quad \text{para } \lambda L = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (523)$$

pero como los valores negativos de n solo afectan a la constante arbitraria A con un cambio de signo, debido a la paridad de la función seno, tomemos únicamente los valores positivos. Entonces, la solución Ω para $\lambda^2 > 0$ tiene la forma

$$A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (524)$$

El significado de la ecuación (524) es muy importante; a primera vista, afirma que para cada valor de n existe una solución distinta a

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0, \quad (525)$$

con $\Omega(0) = \Omega(L) = 0$. Sin embargo, lo que realmente dice es que a cada n corresponde un autovalor λ de (525), dado por

$$\lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (526)$$

y, por consecuencia, corresponde una solución de (513). Esto es debido a que λ determina a μ , y a su vez λ y μ determinan a Ω y Γ , respectivamente. Así,

$$A_1 e^{-\alpha\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad A_2 e^{-\alpha 4\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad \dots \quad A_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \dots \quad (527)$$

son soluciones a (513), con A_1, \dots, A_n constantes arbitrarias. No obstante, ¡esto no significa que sean soluciones al problema de valor inicial que buscamos resolver! El método de separación de variables nos permite descomponer una EDP en varias EDO. Y si bien es cierto que estas funciones que obtuvimos a través de las EDO juntas satisfacen la EDP, ninguna de ellas por sí sola satisface la condición

$$f(x, 0) = \begin{cases} 1, & L/3 \leq x \leq 2L/3 \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \quad (528)$$

Entonces, ¿cómo es posible proceder si ninguna de las soluciones encontradas satisface la condición inicial para f ? La respuesta es la siguiente: aprovechar la linealidad de la ecuación diferencial para expresar la solución al problema de valor inicial en términos de una superposición de las soluciones (527) y luego emplear la teoría de series de Fourier para encontrar las constantes apropiadas de nuestra superposición. Más adelante veremos nuevamente este patrón de superponer soluciones al resolver otras clases de problemas de valor inicial, así que es importante que entienda bien el argumento que sigue: considere una superposición de las soluciones (527) dada por

$$\sum_{n=1}^N A_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (529)$$

Como cada una de las soluciones individuales satisface la ecuación diferencial, entonces la superposición de ellas también la satisface. Ahora, para $t = 0$ esta expresión se torna

$$\sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (530)$$

Una vez obtenido esto, es evidente como las series de Fourier puede servirnos para, finalmente, satisfacer (528); si escogemos las constantes arbitrarias A_n apropiadamente según la teoría de Fourier, entonces esta expresión

tenderá a $f(x, 0)$ a medida que $N \rightarrow \infty$.

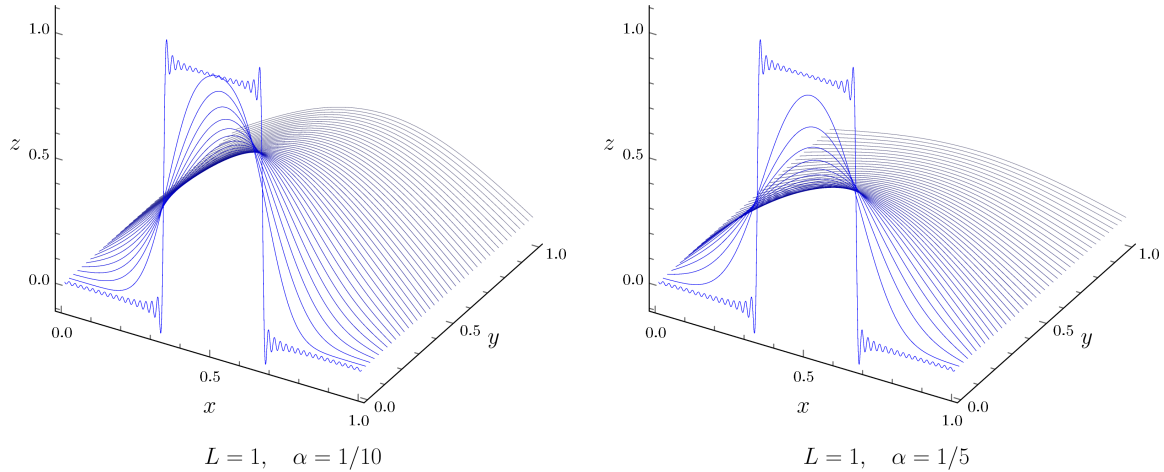
Recordando (266) y observando el argumento de las funciones seno, podemos ver que la suma anterior corresponde a la serie de Fourier $2L$ -periódica de una función impar. $f(x, 0)$ no es impar, pero a través de un procedimiento de *extensión* impar como el descrito en (342) puede ajustarse a nuestras necesidades: una integración a efectuarse sobre un intervalo de longitud $2L$. Tomando $g(x)$ como la extensión impar de $f(x, 0)$ y efectuando la integral, obtenemos que

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{\pi n} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right). \quad (531)$$

Finalmente, la solución del problema de valor inicial que buscamos es dada por

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (532)$$

Si aún tiene dudas sobre cómo esta puede ser la solución, recuerde que cada expresión de la forma (527) satisface (45) y por tanto una superposición lineal de dichas funciones también satisface la EDP, y que además $f(x, t)$ para $t = 0$ es precisamente la serie de Fourier en funciones seno de (528), de modo que, en el límite $N \rightarrow \infty$, esta serie de Fourier converge a (528). No olvide tampoco que la función satisface $f(0, t) = f(L, t) = 0$. Por las razones anteriores, la función f encontrada es la solución al problema de valor inicial planteado. A continuación mostramos una gráfica de la evolución temporal de $z = f(x, t)$ con $L = 1$ para $\alpha = 1/10$ y $\alpha = 1/5$, respectivamente, a $N = 100$ términos. Note los defectos de la función para $t = 0$, característicos de la aproximación de Fourier para una función discontinua.



Tal y como advertimos al principio del ejercicio, el comportamiento del perfil de temperatura de la barra depende en gran medida del valor de α . Cada material posee una difusividad térmica particular, y es esta la que caracteriza la propagación del calor a través del mismo. Las soluciones de f con valores de α mayores tienden al equilibrio (es decir, a $\partial_x f(x, t) = 0$) más rápidamente, mientras que un α muy pequeño describe situaciones donde la temperatura tarda mucho en alcanzar el equilibrio. Cuantitativamente, esto es fácil de observar pues α acelera el decrecimiento de la exponencial en (532). En este caso, el perfil de temperatura la barra eventualmente tiende a cero dado que sus extremos están forzados a 0 (¿recuerda la condición $f(0, t) = f(L, t) = 0$?). No obstante, más adelante exploraremos situaciones donde la temperatura encuentra el equilibrio en valores mayores que cero y otras donde la temperatura se “esparce” pero nunca se “desperdicia”.

Para cerrar, y antes de dar por terminado el ejercicio, note algo interesante: en (496) mostramos que las soluciones de las EDO auxiliares del método de separación de variables terminan produciendo autofunciones del operador diferencial de la EDP. En este ejercicio, utilizamos dichas autofunciones para construir una superposición lineal de soluciones a la EDP que nos permitiera resolver luego el problema de valor inicial planteado originalmente. Este procedimiento de proponer a una superposición de autofunciones como la solución de un PVI se utiliza a lo largo de un gran abanico de problemas de valor inicial, y es conocido como la

expansión en autofunciones. Dichas expansiones tienen un alcance y eficacia tremendos, y gracias a hermosas pero técnicas relaciones y conexiones entre las EDO resultantes de la separación de variables aplicada a una EDP la expansión de autofunciones será el protagonista de muchos de los problemas que estudiaremos más adelante. Si se considera un lector curioso y desea leer más al respecto, consulte la teoría de los problemas de Sturm-Liouville.

S.4

Al igual que los ejercicios anteriores, procedamos directamente con el método de separación de variables. Considere

$$\phi(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (533)$$

Reemplazando en la ecuación, obtenemos que si

$$D^2\Gamma + \mu^2\Gamma = 0, \quad D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0, \quad (534)$$

entonces, y en concordancia con los resultados de (507), ϕ satisface la ecuación diferencial si

$$\mu^2 - c^2\lambda^2 = 0. \quad (535)$$

Este ejercicio es un caso particular del clásico problema de la cuerda vibrante con extremos atados. Aquí, ϕ describe a la cuerda misma mientras que c indica la velocidad a la que se propagan las perturbaciones sobre la cuerda. Por ahora, continuemos con la resolución del ejercicio para poder explorar esto en detalle más adelante.

En los casos anteriores, hemos apelado a argumentos sobre la extensión de los dominios de solución (sobre si son infinitos en alguna dirección o si son acotados) para determinar los autovalores que resultan en soluciones acotadas o no. Sin embargo, en este caso no es suficiente, puesto que tanto $\mu^2 < 0$, $\mu = 0$ como $\mu^2 > 0$ producen posibles soluciones. En esta situación, debemos explorar todas las posibilidades e identificar soluciones viables para Ω y Γ ; no podemos saltar ninguna *a priori*. Comencemos entonces con $\mu^2 < 0$. Según (489) y suponiendo que $\mu^2 = -\nu^2$ con $\nu > 0$, la solución para Γ tiene la forma

$$A \sinh(\nu t) + B \cosh(\nu t). \quad (536)$$

No obstante, esta posibilidad puede descartarse rápidamente observando que, como

$$\partial_t \phi(x, 0) = \Omega(x) \partial_t \Gamma(t) = 0 \quad (537)$$

para todo x , entonces

$$A \cosh(0) + B \sinh(0) = A = 0, \quad (538)$$

y por tanto, la solución se reduciría a

$$B \cosh(\nu t). \quad (539)$$

Pero esta expresión no es acotada a medida que $t \rightarrow \infty$. Así, vemos que la condición $\mu^2 < 0$ no produce ninguna solución válida. Siguiendo con $\mu = 0$, la más fácil de las condiciones, obtenemos mediante un argumento idéntico al anterior que la única solución posible para ϕ es una solución constante; basta con aplicar la restricción de la derivada temporal como recién lo hicimos para la solución de $\mu^2 < 0$. En efecto, luego de tomar el producto de las soluciones correspondientes para Γ y Ω , ϕ tendría la forma

$$A + Bx + Ct + Dxt. \quad (540)$$

Aplicando la condición (537), encontramos que C y D deben ser nulos, y la solución candidata se reduce a

$$A + Bx. \quad (541)$$

Pero como

$$\phi(-\pi, t) = \phi(\pi, t) = 0, \quad (542)$$

para todo t , observamos que A y B deben ser también nulos. Así concluimos que $\mu = 0$ tampoco produce una solución válida. Finalmente, consideremos $\mu^2 > 0$. Según hemos visto en ejercicios previos, la solución correspondiente para Γ tiene la forma

$$C \sin(\mu t) + D \cos(\mu t). \quad (543)$$

Aplicando nuevamente la condición (537), obtenemos que $A = 0$ y por tanto la solución se torna

$$D \cos(\mu t). \quad (544)$$

Por otra parte, la solución correspondiente para Ω tiene la misma forma que Γ (pues es exactamente la misma ecuación y la misma condición, $\lambda^2 > 0$)

$$A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x). \quad (545)$$

Sin embargo, dado que Ω debe ser tal que ϕ satisfaga (542), entonces evaluando en $-\pi$ y π obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-A \sin(\lambda\pi) + B \cos(\lambda\pi) = 0, \quad (546)$$

$$A \sin(\lambda\pi) + B \cos(\lambda\pi) = 0. \quad (547)$$

Aquí es importante prestar especial atención a qué valores tomarán A , B y λ . Utilizar nuestra fuerza bruta para explorar todas las posibles combinaciones es inútil; debemos razonar con cuidado la forma que *debería* tener Ω para que pueda ajustarse luego al resto de las condiciones del problema, en vez de simplemente probar todas las alternativas.

No estamos frente a un problema misterioso. Ya conocemos de antemano, según discutimos en el ejercicio anterior, que al final habremos obtenido una *expansión en autofunciones* y que, mediante la teoría de Fourier, podremos aproximar el perfil de la función para $t = 0$. Sumando ambas ecuaciones, obtenemos que

$$2B \cos(\lambda\pi) = 0. \quad (548)$$

¿Cuál es el camino correcto? ¿Deberíamos tomar $B = 0$ o ajustar a λ tal que $\cos(\lambda\pi) = 0$? Pues, si tomamos $B = 0$ entonces el sistema se reduce a

$$A \sin(\lambda\pi) = 0 \quad (549)$$

y, con tal de producir soluciones distintas de la trivial, esto implícitamente define los valores admitidos para λ como aquellos dados por

$$\lambda = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (550)$$

En cambio, si en (548) tomamos que $B \neq 0$ y por tanto

$$\cos(\lambda\pi) = 0 \quad (551)$$

nuevamente definimos de manera implícita los valores posibles de λ ,

$$\lambda = n - \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (552)$$

y como consecuencia, al reemplazar de vuelta en el sistema de ecuaciones obtenemos que $A = 0$. Note como no hay manera de esquivar esta situación: hay tres parámetros, y dos ecuaciones. Uno es libre de tomar valores arbitrarios, y los otros dos tomarán valores según las suposiciones que hagamos y las condiciones que los restringen. Entonces, parece que las posibles soluciones para Ω pueden tener una de dos formas:

$$A_n \sin(nx) \quad \text{ó} \quad B_n \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (553)$$

donde A_n , B_n son las constantes arbitrarias para cada valor de n . Nuevamente, debemos afrontar la pregunta: ¿cual opción es la correcta? ¡La respuesta es más simple de lo que piensa! Debe escoger la familia de funciones

que mejor sirva para aproximar a $f(x, 0)$ en la serie de Fourier resultante. Nunca pierda de vista la esencia de la expansión en autofunciones: descomponer un gran problema en varios pequeños, superponer las soluciones respectivas y, al final, ajustar a las condiciones iniciales. Dado que $f(x, 0)$ es impar, ciertamente nuestros cálculos serán más sencillos de elaborar tomando a $A_n \sin(nx)$ como la familia de soluciones para Ω . Además, nuestro conocimiento sobre series de Fourier requiere que el argumento de las funciones seno y coseno crezca en múltiplos enteros, y no según los números $n - 1/2$. Así, y efectuando el producto de las soluciones escogidas para Ω y Γ , obtenemos que las soluciones para ϕ tienen la forma

$$A_n \cos(nect) \sin(nx). \quad (554)$$

Cabe destacar que en la expresión anterior hemos absorbido la constante arbitraria de la solución de Γ dentro de A_n por mera conveniencia. Entonces, y procediendo igual que en el ejercicio anterior, suponga que ϕ sea una superposición de las soluciones encontradas,

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nect) \sin(nx). \quad (555)$$

Esta función satisface todas las condiciones del problema excepto la condición inicial para $t = 0$. Sin embargo, evaluando en $t = 0$, obtenemos la serie de Fourier

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx). \quad (556)$$

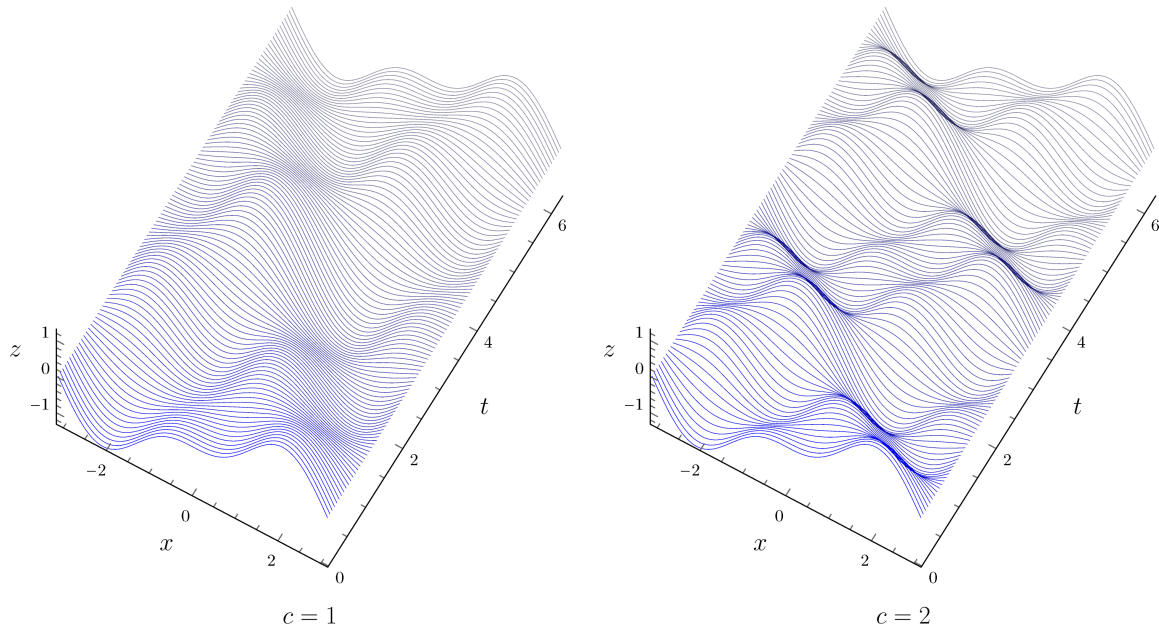
Así, podemos tomar los A_n según la fórmula usual. Sin embargo, antes de abalanzarse a la integral, tome un segundo para observar la función $\sin(x)(1 - \cos(x))$. Note que

$$\sin(x)(1 - \cos(x)) = \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x). \quad (557)$$

Si algo recuerda de la sección de Series de Fourier, reconocerá de inmediato a esta expresión como la serie de Fourier de $\phi(x, 0)$. Por tanto, la solución ϕ deseada para el problema de valor inicial es dada, finalmente, por

$$\phi(x, t) = \cos(ct) \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(2ct) \sin(2x). \quad (558)$$

A continuación mostramos una gráfica de la evolución temporal para $z = \phi(x, t)$ con $c = 1$ y luego $c = 2$.



Volviendo a la interpretación que dimos a ϕ al principio del problema, éstas gráficas de $z = \phi(x, t)$ representan la forma de la cuerda a medida que transcurre el tiempo, partiendo desde la configuración inicial $\phi(x, 0)$. La

vista es ortográfica (sin distorsiones de perspectiva), y con una ligera elevación. Aquí pueden observarse las distintas propiedades de ϕ . Sin embargo, preste especial atención al efecto que posee c sobre la solución al problema. Tal y como advertimos, c afecta directamente la rapidez con la que cuerda cambia de forma; en otras palabras, el parámetro c determina la rapidez con que las perturbaciones sobre la cuerda se desplazan de un lado a otro: mientras mayor sea el valor de c , más rápidamente se propagan. Más adelante veremos explícitamente cómo es que esto sucede y cómo ciertas combinaciones de pulsos o *modos* fundamentales dan origen a ondas estacionarias.

S.5

Como es usual, procedamos con el método de separación de variables. Además, para ahorrar en escritura, a menos que se indique lo contrario las letras mayúsculas denotarán constantes reales. Considere

$$\psi(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (559)$$

Así, reemplazando en la ecuación de Laplace obtenemos que si

$$D^2\Gamma + \mu^2\Gamma = 0, \quad \text{y} \quad D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0 \quad (560)$$

entonces ψ es solución siempre que

$$\mu^2 + \lambda^2 = 0. \quad (561)$$

Como no existe ninguna restricción sobre t y ésta es libre de tomar cualquier valor en \mathbb{R} , los únicos valores de μ que admiten soluciones acotadas para Γ son aquellos con $\mu^2 \geq 0$. Si tomamos $\mu = 0$, entonces $\lambda = 0$ y la solución obtenida para ψ es de la forma

$$C + Dx + Et + Fxt. \quad (562)$$

No obstante, como $|\psi| < \infty$ para todo x, t , se sigue que $D = E = F = 0$ y la solución en cuestión es simplemente una constante. Ahora, consideremos $\mu^2 > 0$. Bajo esta suposición, la solución para Γ tiene la forma

$$A_\mu \sin(\mu t) + B_\mu \cos(\mu t) \quad (563)$$

y por tanto, como $\lambda^2 = -\mu^2$, la solución para Ω tiene la forma

$$A_\lambda \sinh(\mu x) + B_\lambda \cosh(\mu x). \quad (564)$$

Pero esta solución, dado que ϕ debe mantenerse acotada a medida que $x \rightarrow \infty$, debe satisfacer

$$|A_\lambda \sinh(\mu x) + B_\lambda \cosh(\mu x)| = \left| \frac{1}{2} (B_\lambda + A_\lambda) e^{\mu x} + \frac{1}{2} (B_\lambda - A_\lambda) e^{-\mu x} \right| < \infty, \quad \text{para } x \rightarrow \infty. \quad (565)$$

Así, el término

$$\frac{1}{2} (B_\lambda - A_\lambda) e^{\mu x} \quad (566)$$

debe anularse y por tanto $A_\lambda = -B_\lambda$. De esta manera, la solución para Ω se reduce a

$$B_\lambda (\cosh(\mu x) - \sinh(\mu x)) = B_\lambda e^{-\mu x}. \quad (567)$$

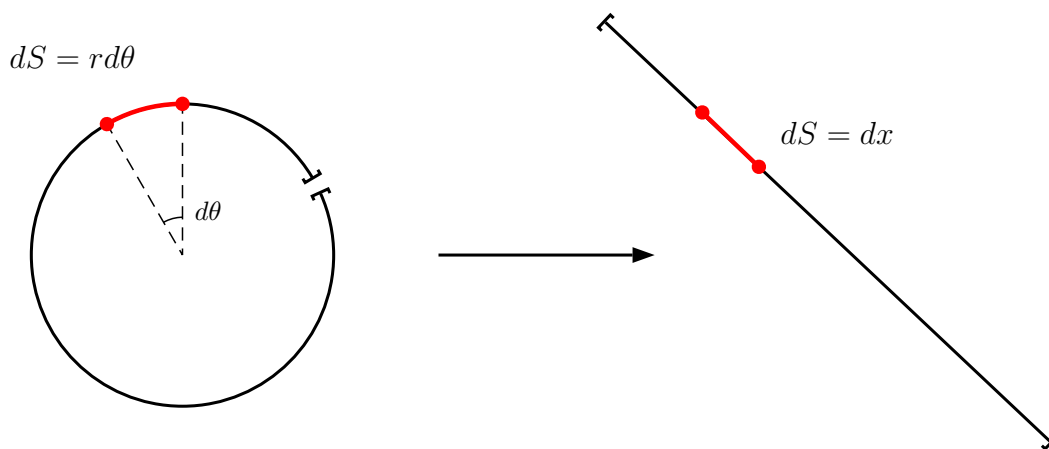
Finalmente, y juntando ambos resultados, la solución genérica acotada para ψ es dada por

$$\psi(x, t) = C + Ae^{-\mu x} \sin(\mu t) + Be^{-\mu x} \cos(\mu t), \quad (568)$$

donde A y B han absorbido el producto de las constantes respectivas.

S.6

Antes de comenzar el ejercicio es importante abordar la siguiente pregunta: ¿cómo es posible que las condiciones de borde transformen un intervalo acotado común y corriente en un dominio anular? Si bien la respuesta rigurosa depende de ciertas nociones con las que quizá no se encuentre familiarizado (y que seguramente no le ayudarán a entender el razonamiento en lo absoluto) puede pensar el problema de la siguiente manera: si usted fuese una hormiga caminando sobre un anillo, ¿cómo podría saber que se encuentra sobre un anillo? O, mejor aún, si ya supiera de antemano que se encuentra sobre un anillo, ¿cómo podría saber si algún otro camino también tiene la forma de un anillo?



Si al dar un paso hacia adelante (en cualquier punto del camino) recorre la misma distancia que recorrería si estuviese en un anillo, y si al recorrer una cierta cantidad de unidades en una dirección vuelve al mismo punto en el que comenzó, no dudaría de afirmar que se encuentra caminando sobre un anillo. Este es precisamente el argumento de nuestra comparación: un intervalo cerrado bajo una condición de periodicidad se comporta de la misma manera que un anillo y, en nuestro caso particular, podemos identificar el dominio de la variable espacial x con un anillo cuyo radio es 1 (¿Por qué $r = 1$? Compare la distancia entre dos puntos cualesquiera sobre un anillo de radio r y el dominio en cuestión). Ahora que hemos razonado la correspondencia entre el dominio de solución y un anillo, procedamos con el ejercicio.

Aplicando el método de separación de variables, considere

$$f(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (569)$$

De esta manera obtenemos que si

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0, \quad \text{y} \quad D^2\Gamma + \mu\Gamma = 0, \quad (570)$$

entonces f es solución siempre que

$$\mu - \alpha\lambda^2 = 0. \quad (571)$$

Usando el mismo razonamiento de los ejercicios anteriores, según (485) la única solución para Γ tiene la forma

$$e^{-\mu t}, \quad (572)$$

pero como ésta debe mantenerse acotada a medida que $t \rightarrow \infty$, entonces $\mu \geq 0$. De aquí que $\lambda^2 \geq 0$. Exploremos las soluciones para cada caso: tomando $\lambda^2 = 0$, vemos que la solución para Ω tiene la forma

$$C + Dx. \quad (573)$$

Sin embargo, aplicando las condiciones (52) obtenemos que la única solución válida para $\lambda = 0$ es una constante, C . Luego, tomando $\lambda^2 > 0$ obtenemos que la solución para Ω es de la forma

$$A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x). \quad (574)$$

Aplicando las condiciones de borde nuevamente,

$$-A \sin(\lambda \pi) + B \cos(\lambda \pi) = A \sin(\lambda \pi) + B \cos(\lambda \pi) \implies A \sin(\lambda \pi) = 0, \quad (575)$$

y por tanto $\lambda = n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Curiosamente, una vez obtenido el resultado anterior la expresión (574) automáticamente satisface $\partial_x f(-\pi, t) = \partial_x f(\pi, t)$, pero esto no debe extrañarnos: las funciones $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ son 2π -periódicas, y por ende también lo son sus derivadas. Juntando todos los resultados, obtenemos que una solución genérica para f tiene la forma

$$C + e^{-\alpha n^2 t} (A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx)). \quad (576)$$

Siguiendo el mismo criterio que los ejercicios, considere una solución candidata para f dada por

$$f(x, t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2 t} (A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx)). \quad (577)$$

Para $t = 0$, esta expresión se torna

$$f(x, 0) = C + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx), \quad (578)$$

y esto no es más que la serie de Fourier propia de alguna función. Así, encontrar los coeficientes C , A_n y B_n tales que

$$f(x, 0) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (579)$$

es solo cuestión de carpintería. La constante C puede calcularse directamente tomando

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, 0) dx = \frac{\pi}{8}, \quad (580)$$

y las otras constantes mediante sus integrales de Fourier respectivas,

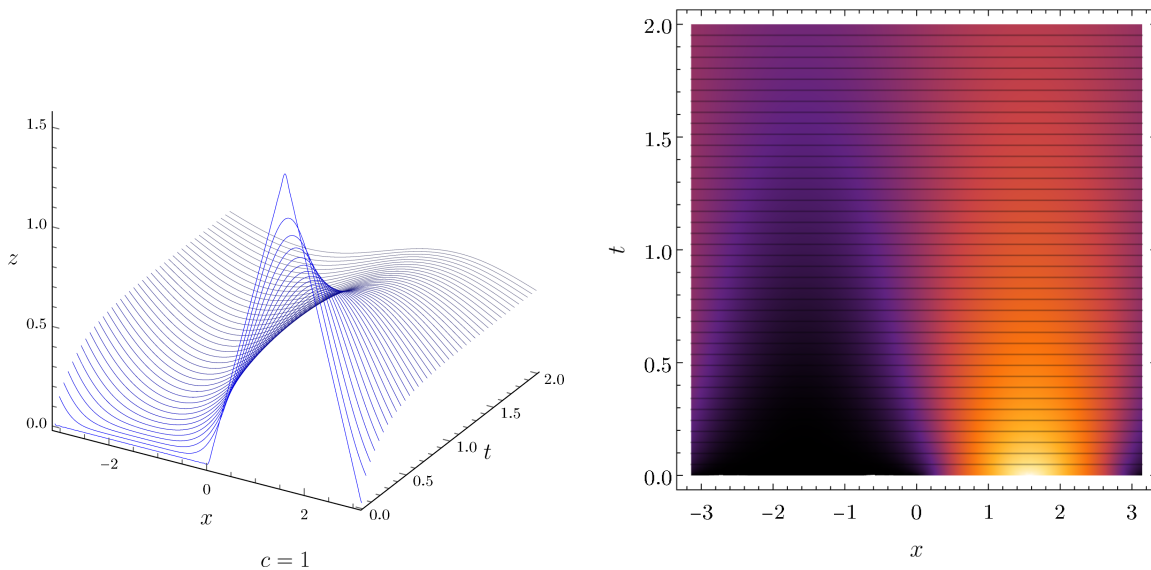
$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, 0) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (581)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, 0) \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (582)$$

Finalmente, la solución f al problema de valor inicial es dada por

$$f(x, t) = \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n^2 t}}{n^2} \left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx) + \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nx) \right). \quad (583)$$

A continuación se muestran dos gráficas de la evolución temporal de $z = f(x, t)$ para $\alpha = 1$.



Mire bien las gráficas. Observe como en ellas sucede algo que, de no ser por las condiciones de borde periódicas, sería físicamente imposible. Volviendo a la analogía de la barra unidimensional, las gráficas parecen indicar que la temperatura del borde izquierdo de la barra sube bruscamente a partir de $t = 0$ mientras que la región que separa el lado izquierdo del derecho, específicamente entre -2 y 0 , se mantiene relativamente fría. ¿Cómo es posible que el calor que se encontraba concentrado del lado derecho se haya disipado al borde izquierdo sin primero aumentar la temperatura de la región que los separa? La respuesta a esta pregunta la conocemos desde el principio: este problema matemático no modela una barra, sino un *anillo*. Las condiciones de borde periódicas impuestas sobre el problema establecen la topología de la solución, y al ser esta de forma anular, es natural que el calor pueda transmitirse del borde derecho al izquierdo sin pasar por $x = 0$, pues el borde derecho y el izquierdo son en realidad el mismo borde.

S.7

Para comenzar, procedamos como es usual con separación de variables. Considere

$$\phi(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (584)$$

De esta manera vemos que si

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0, \quad \text{y} \quad D^2\Gamma + \mu^2\Gamma = 0, \quad (585)$$

entonces ϕ es solución siempre que

$$\mu^2 - c^2\lambda^2 = 0. \quad (586)$$

Yendo caso por caso para μ^2 , y empleando exactamente los mismos argumentos usados en (539) y (540), obtenemos que solo $\mu^2 > 0$ produce una solución válida para Γ y que tiene la forma

$$C \cos(\mu t). \quad (587)$$

Luego, como $\lambda^2 > 0$, entonces la solución correspondiente para Ω tiene la forma

$$A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x). \quad (588)$$

Aplicando la condición $\phi(-\pi, t) = \phi(\pi, t) = 0$, obtenemos el sistema lineal

$$-A \sin(\lambda\pi) + B \cos(\lambda\pi) = 0 \quad (589)$$

$$A \sin(\lambda\pi) + B \cos(\lambda\pi) = 0. \quad (590)$$

Llegado a este punto, debemos tener cuidado al calcular. En ejercicios pasados, no hemos tenido obstáculos al simplemente anular B de tal forma que luego pueda ajustarse λ y satisfacer las condiciones impuestas. Sin embargo, esto implicaría que nuestra solución tiene la forma

$$A \sin(nx). \quad (591)$$

Esto presenta un problema sutil pero peligroso. Si nuestro propósito con esta función es construir una expansión en autofunciones más adelante, para luego ajustar a la condición inicial $\phi(x, 0)$ usando la teoría de Fourier, tendremos una pared en el camino: la serie de Fourier tendrá solo funciones seno, y la condición inicial $f(x, 0)$ no es impar. No obstante, este callejón tiene salida. De hecho, tiene dos. No desespere, a continuación exploraremos dos posibles caminos a seguir para resolver este *nuevo* problema.

Realmente, $\lambda = n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ no es la única forma que resulta en

$$\sin(\lambda\pi) = 0. \quad (592)$$

Podríamos también escoger $\lambda = 2n$ o $\lambda = 3n$ a conveniencia y aún así poder satisfacer la condición. Ahora, imagine por un momento que la solución deseada no fuese sobre $(-\pi, \pi)$, sino sobre $(0, 2\pi)$. Bajo esta suposición, obtener únicamente funciones seno como solución para Ω no sería un problema, puesto que bien podríamos seguir un proceso de extensión impar como el descrito en (342) y encontrar una serie de Fourier que se ajuste a $\phi(x, 0)$ solo con funciones seno. Entonces, el problema clave es que nuestro origen de coordenadas no nos permite extender de forma impar a $\phi(x, 0)$. Afortunadamente la solución a esto es simple: considere el cambio de variable

$$u = x + \pi \quad (593)$$

y sea $\psi = \psi(u, t)$ tal que

$$\psi(u, t) = \psi(x + \pi, t) = \phi(x, t). \quad (594)$$

Resolver el problema de valor inicial para $x \in (-\pi, \pi)$ es muy *inconveniente*; por el contrario, podemos resolver un problema *equivalente* para $u \in (0, 2\pi)$ más fácilmente y luego devolver el cambio. Como la relación entre u y x es lineal, entonces los operadores diferenciales ∂_u y ∂_x son equivalentes. Es decir, para f arbitraria

$$\partial_x f = \partial_x u \cdot \partial_u f = \partial_u f \quad (595)$$

en virtud de la regla de la cadena, y así es posible asegurar que si ψ satisface

$$\partial_t^2 \psi - c^2 \partial_u^2 \psi = 0 \quad (596)$$

entonces también satisface

$$\partial_t^2 \psi - c^2 \partial_x^2 \psi = 0. \quad (597)$$

Por lo tanto, nuestro PVI *auxiliar* consiste de

$$\partial_t^2 \psi - c^2 \partial_u^2 \psi = 0, \quad (598)$$

$$\psi(0, t) = \psi(2\pi, t) = 0, \quad \partial_t \psi(u, 0) = 0, \quad (599)$$

$$\psi(u, 0) = \phi(u - \pi, 0). \quad (600)$$

Empleando el método de separación de variables tomando

$$\psi(u, t) = \omega(u)\gamma(t) \quad (601)$$

obtenemos que las soluciones admitidas para ω y γ son las mismas soluciones válidas que encontramos en el problema original; γ tiene la forma

$$D \cos(\lambda ct) \quad (602)$$

mientras que ω tiene la forma

$$A \sin(\lambda u), \quad (603)$$

donde λ es tal que

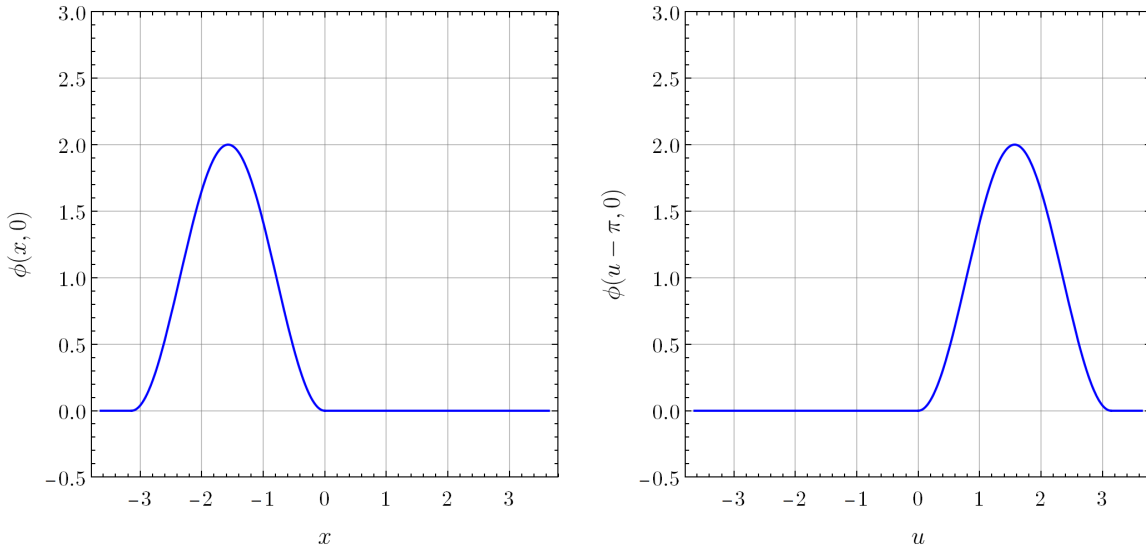
$$\sin(2\pi\lambda) = 0. \quad (604)$$

Aquí es donde debemos retomar nuestra idea de la extensión impar de $\phi(u - \pi, 0)$. Ahora que la función está apropiadamente posicionada alrededor del origen, tenemos un camino claro para la serie de Fourier que obtendremos al final: proceder con una extensión impar de $\phi(u - \pi, t)$ según (342) y realizar una integración sobre un dominio de longitud 4π . Así, y tomando a λ según

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (605)$$

para que el argumento de las funciones seno coincida con el de la fórmula integral sobre un dominio con $L = 4\pi$, proponemos que la solución ψ al PVI sea una superposición de las soluciones genéricas dada por

$$\psi(u, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{nct}{2}\right) \sin\left(\frac{nu}{2}\right). \quad (606)$$



Evaluando en $t = 0$ llegamos al último paso para encontrar a ψ : ajustar los A_n tal que

$$\phi(u - \pi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{nu}{2}\right). \quad (607)$$

Efectuando la integración descrita anteriormente, y definiendo $g = g(u)$ como la extensión impar de $\phi(u - \pi, 0)$, los A_n vienen dados por

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} g(u) \sin\left(\frac{nu}{2}\right) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(u - \pi, 0) \sin\left(\frac{nu}{2}\right) du = -\frac{64}{n\pi(n^2 - 4^2)} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right). \quad (608)$$

Por consiguiente, la solución al PVI auxiliar $\psi(u, t)$ resulta

$$\psi(u, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{n\pi(n^2 - 4^2)} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{nct}{2}\right) \sin\left(\frac{nu}{2}\right). \quad (609)$$

Y así, finalmente, la solución $\phi(x, t)$ al PVI que originalmente queríamos resolver se obtiene invirtiendo el cambio:

$$\phi(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{n\pi(n^2 - 4^2)} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{nct}{2}\right) \sin\left[\frac{n(x + \pi)}{2}\right] \quad (610)$$

En este punto podríamos dar por terminado el ejercicio. Sin embargo, aún falta por explorar una forma adicional para resolver el problema. Note lo siguiente:

$$\sin \left[\frac{n(x + \pi)}{2} \right] = \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{nx}{2} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \quad (611)$$

Esta expresión nos da un indicio muy interesante sobre de qué otro modo pudimos haber resuelto el problema de valor inicial. Sustituyendo de vuelta en la suma,

$$\phi(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{n\pi(n^2 - 4^2)} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{nct}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{nx}{2} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \right]. \quad (612)$$

¿No le parece una gran coincidencia que el término entre corchetes sea muy similar a la forma de la solución genérica que obtuvimos para Ω durante la separación de variables? Pues coincidencia no es; es simplemente el resultado de la siguiente observación.

Volvamos nuestra atención a (589) y supongamos que

$$A = K \cos(\delta), \quad B = K \sin(\delta) \quad (613)$$

para $K, \delta \in \mathbb{R}$. De esta manera, el sistema de ecuaciones puede reescribirse como

$$\cos(\delta) \sin(\lambda\pi) - \sin(\delta) \cos(\lambda\pi) = \sin(\lambda\pi - \delta) = 0 \quad (614)$$

$$\cos(\delta) \sin(\lambda\pi) + \sin(\delta) \cos(\lambda\pi) = \sin(\lambda\pi + \delta) = 0. \quad (615)$$

Aquí, uno estaría tentado a tomar

$$\lambda\pi - \delta = n\pi, \quad \lambda\pi + \delta = n\pi. \quad (616)$$

pero estas ecuaciones implican $\delta = 0$ y deshacen lo que justamente queremos explorar. ¡Necesitamos que las ecuaciones sean distintas, pero igual de ciertas! Al mismo tiempo, no debe perder de vista que una vez obtenida la solución genérica esta debe ser capaz de ajustar a $\phi(x, 0)$, y como la única forma de ajustar solo con funciones seno es mediante la extensión impar de la función, estas deben estar desplazadas π unidades a la izquierda. Juntando todos estos requerimientos, podemos escribir las ecuaciones para λ y δ como

$$\lambda\pi - \delta = 0, \quad \lambda\pi + \delta = n\pi. \quad (617)$$

Por tanto, obtenemos

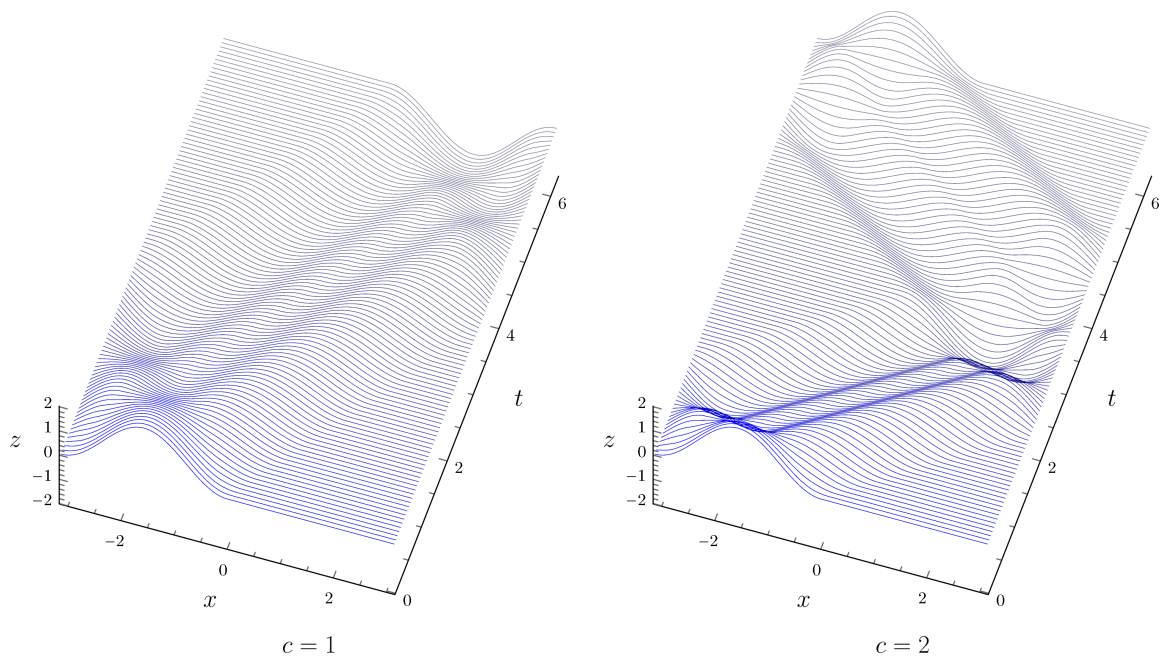
$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad \delta = \frac{n\pi}{2} \quad (618)$$

y la solución válida para Ω tiene la forma

$$K_n \sin \left[\frac{n(x + \pi)}{2} \right]. \quad (619)$$

A partir de aquí lo que único que restaría sería juntar las soluciones, proponer una superposición de las soluciones genéricas como solución al PVI, utilizar la teoría de Fourier para calcular los coeficientes K_n de la serie centrada en $x = \pi$ y finalmente transformar la serie a su versión centrada en $x = 0$ utilizando las fórmulas de (369). Esta transformación final, por cierto, es la que añadiría los factores adicionales en (611). Ahora que hemos visto ambos caminos puede darse cuenta de que el tema central del problema fue lograr producir una serie de Fourier restringida a funciones seno sobre un dominio que no puede extenderse directamente. De una u otra forma, ambos métodos no fueron más que maniobras para poder aprovechar la simetría de la extensión; ya sea corriendo el dominio mediante un cambio de variable o calculando la serie de Fourier resultante desde un centro conveniente para luego transformar de vuelta mediante (369), lo que no debe perder de vista es que el norte de estos problemas es obtener y ajustar la *expansión en autofunciones*. Si usted es capaz de dominar este concepto, la gran mayoría de los problemas por venir le serán tanto más fáciles.

Para cerrar, a continuación se muestran gráficas de la evolución temporal de $z = \phi(x, t)$ con $c = 1$ y $c = 2$, efectuando la suma a $N = 200$ términos.



En las gráficas puede nuevamente observarse el manifiesto efecto de c . Mientras mayor sea c , más rápido se propagarán los pulsos sobre el dominio. Además, observe como el pulso al llegar al borde opuesto es reflejado de vuelta. Si alguna vez jugó de niño a saltar la cuerda con amigos, este efecto seguramente le parecerá familiar. Sin embargo, note que el pulso es reflejado de una forma peculiar: al llegar al borde opuesto, el pico del principio cambia de signo para formar un valle, y luego procede a alternar para las reflexiones siguientes. ¿A qué cree que se debe esto? Le invitamos a razonar la situación y a encontrar un argumento físico sobre por qué las reflexiones suceden de esta forma.

S.8

Como es usual, procedamos con separación de variables. Considere

$$\psi(x, y) = \Omega(x)\Gamma(y). \quad (620)$$

De esta manera, si

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0 \quad \text{y} \quad D^2\Gamma + \mu^2\Gamma = 0 \quad (621)$$

entonces ψ es solución siempre que

$$\mu^2 + \lambda^2 = 0. \quad (622)$$

Como el dominio de solución es acotado en todas direcciones, debemos explorar cada posibilidad para los autovalores. Comencemos con $\mu^2 < 0$. Así, y dado que $\mu^2 = -\lambda^2$, la solución para Γ es de la forma

$$C \sinh(\lambda y) + D \cosh(\lambda y). \quad (623)$$

Como consecuencia, $\lambda^2 > 0$. De esta manera, la solución correspondiente para Ω tiene la forma

$$A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x). \quad (624)$$

Sin embargo, las condiciones $\phi(x, 0) = 0$, $\phi(x, 1) = x$ implican que para un x dado

$$\Gamma(0) = 0, \quad \Gamma(1) = 1. \quad (625)$$

Por tanto, C y D satisfacen

$$C = \operatorname{csch}(\lambda), \quad D = 0. \quad (626)$$

Note que no tenemos ninguna condición explícita sobre Ω más allá de que debe estar definida sobre $[0, 1]$. Así, y como sabemos que al final nuestro objetivo será ajustar la expansión de autofunciones resultante, podemos tomar por conveniencia que las funciones seno y coseno sean 2-periódicas. Entonces, y tomando

$$\lambda = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (627)$$

obtenemos la solución genérica para $\mu^2 < 0$, que es dada por

$$\operatorname{csch}(\pi n) \sinh(\pi n y) (A_n \sin(\pi n x) + B_n \cos(\pi n x)). \quad (628)$$

No obstante, prosigamos con los casos para μ . Tomemos ahora $\mu = 0$, la solución correspondiente para Γ es simplemente una función lineal

$$E + Fy. \quad (629)$$

Aplicando (625), esta solución se reduce simplemente a y . De forma similar, $\lambda = 0$ implica que Ω es también una función de la forma

$$G + Hx \quad (630)$$

de manera que una solución genérica para ϕ es dada por

$$y(G + Hx). \quad (631)$$

Pero como $\phi(x, 1) = x$, entonces $G = 0$, $H = 1$ y

$$\phi(x, y) = xy \quad (632)$$

es una solución del problema de valor inicial. Sí, leyó bien, (632) es una solución al problema de valor inicial.

Seguramente se encuentre profundamente confundido en este momento. ¿Cómo es posible que (632) sea una solución al PVI si no es una superposición de soluciones genéricas? Si realmente es una solución, ¿significa esto que no es posible construir la solución a partir de las soluciones genéricas de (628)? La respuesta es muy sencilla: en ningún momento hemos pretendido afirmar que las soluciones que encontramos son las *únicas* soluciones posibles. Estudiar la unicidad de las soluciones es mucho más fácil para las EDO que para las EDP. Incluso, para ciertas clases de ecuaciones en derivadas parciales, la unicidad de las soluciones sigue siendo objeto de estudio e investigación. Por el momento, no existen motivos para involucrarnos en tales asuntos: a nosotros nos basta con ser capaces de producir *una* solución, y puede verificarse que $\phi(x, y) = xy$ satisface la ecuación diferencial y todas las condiciones de borde impuestas. Por consecuencia, ϕ es *una* solución al PVI.

Sin embargo, aún podemos explorar una solución para el PVI en términos de (628). Proponiendo que la solución sea una superposición de tales expresiones, obtenemos

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\pi n y)}{\sinh(\pi n)} (A_n \sin(\pi n x) + B_n \cos(\pi n x)). \quad (633)$$

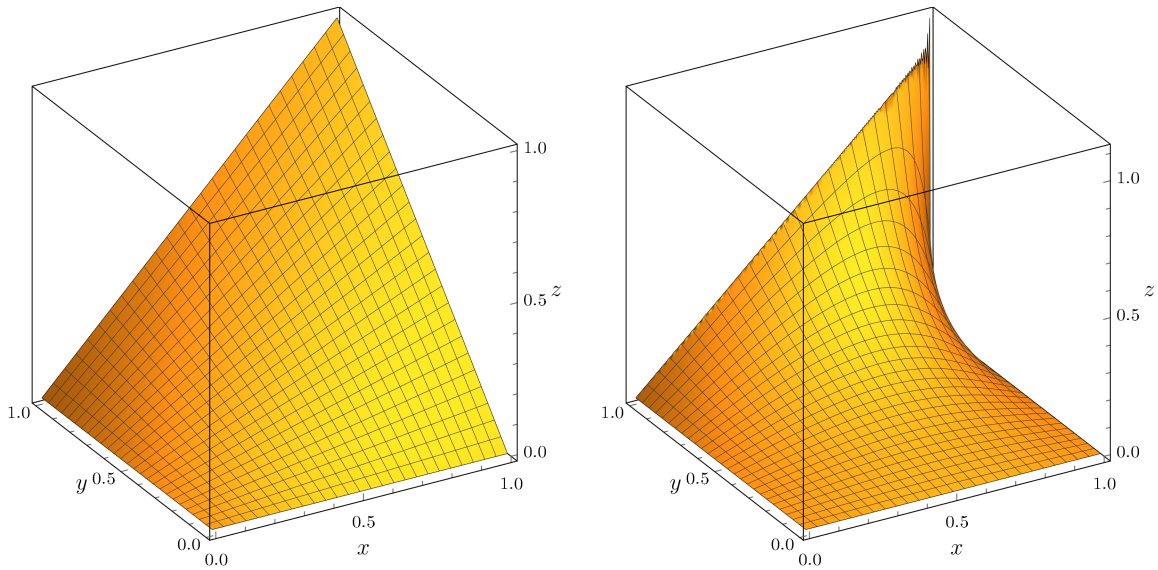
Evaluando en $y = 1$, obtenemos la igualdad

$$\phi(x, 1) = x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x) + B_n \cos(\pi n x). \quad (634)$$

Finalmente, y calculando los coeficientes de la serie según las fórmulas integrales, ϕ resulta

$$\phi(x, y) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \frac{\sinh(\pi n y)}{\sinh(\pi n)} \sin(\pi n x) \quad (635)$$

Esta *también* es una solución válida al problema de valor inicial. La pregunta de si ambas soluciones son equivalentes en algún sentido no nos concierne por ahora; a juzgar por las siguientes gráficas, no es difícil intuir que no lo son. De igual manera, verificamos nuevamente que la solución al problema es una expansión en autofunciones, incluso aunque la expansión solo tenga un término (xy). Al final, la diferencia entre la viabilidad de ambas soluciones dependerá, para usted, de qué tan rápido puede llegar a ella. En un examen parcial, y por más elegante que le parezca la segunda solución, la primera es claramente la más rápida de calcular. A continuación se muestran dos gráficas para $z = \phi(x, t)$; la primera corresponde a la solución xy , mientras que la segunda corresponde a la obtenida mediante series de Fourier.



S.9.A

Procedamos como es usual con separación de variables. Considere

$$f(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (636)$$

Así, si Ω y Γ satisfacen

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0, \quad \text{y} \quad D\Gamma + \mu\Gamma = 0 \quad (637)$$

entonces f es solución a la ecuación diferencial siempre que

$$\mu - \alpha\lambda^2 = 0. \quad (638)$$

De forma similar a ejercicios anteriores, como la solución de Γ debe mantenerse acotada a medida que $t \rightarrow \infty$ entonces necesariamente $\mu \geq 0$ y por tanto $\lambda \geq 0$. Tomando primero $\lambda = 0$, vemos que para este valor corresponde una solución Ω de la forma

$$C + Dx. \quad (639)$$

Sin embargo, como $\partial_x f(0, t) = \partial_x f(1, t) = 0$, entonces la solución se reduce simplemente a una constante, C . Considerando ahora $\lambda > 0$, vemos que la solución para Ω es de la forma

$$A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x). \quad (640)$$

Aplicando la condición anterior nuevamente, obtenemos que $A = 0$ y por tanto la solución resulta

$$B \cos(\lambda x), \quad \text{con} \quad \lambda = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (641)$$

Habiendo explorado todos los posibles valores de λ , propongamos que la solución candidata para f sea una superposición de las soluciones genéricas encontradas. Así, tome

$$f(x, t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t} \cos(\pi n x). \quad (642)$$

Evaluando en $f(x, 0)$, obtenemos la serie de Fourier 2-periódica

$$f(x, 0) = C + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\pi n x). \quad (643)$$

Siguiendo el mismo esquema de extensión de los ejercicios anteriores, los coeficientes de la serie pueden encontrarse efectuando las integrales de Fourier correspondientes. Sea $g = g(x)$ la extensión par de $f(x, 0)$ sobre el dominio $(-1, 1)$. Entonces,

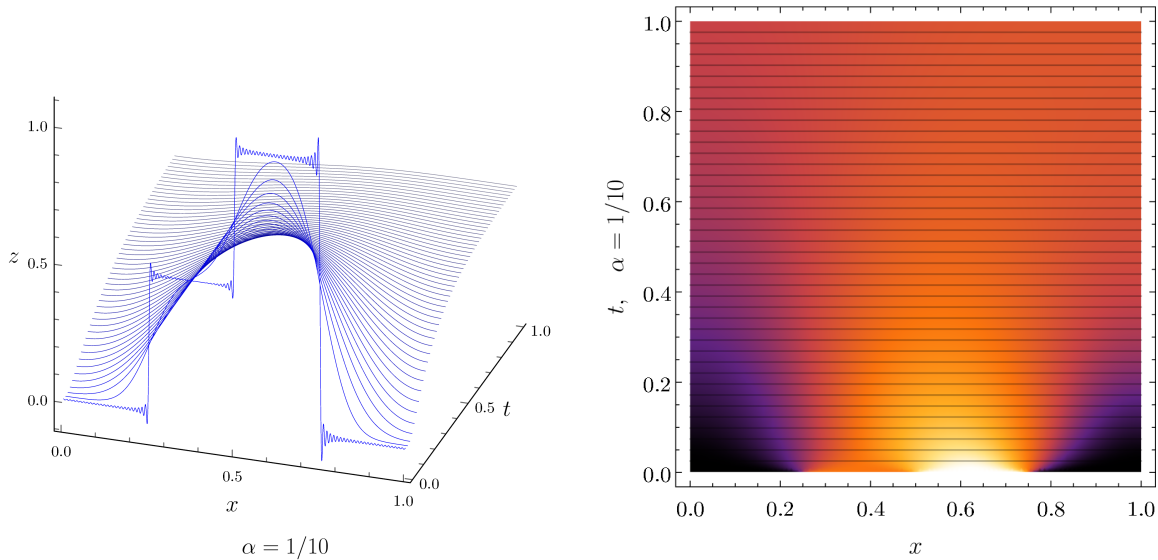
$$C = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x, 0) dx = \frac{3}{8}. \quad (644)$$

$$B_n = \int_{-1}^1 g(x) \cos(\pi n x) dx = -\frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right] \quad (645)$$

De esta manera, la solución f al problema de valor inicial planteado es dada por

$$f(x, t) = \frac{3}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right] e^{-\alpha n^2 \pi^2 t} \cos(\pi n x). \quad (646)$$

Antes de proceder con el siguiente inciso observe las gráficas mostradas de $z = f(x, t)$ para $\alpha = 1/10$, efectuando la suma a $N = 200$.



Note como, a diferencia de la solución para la barra con extremos forzados a temperatura cero, este perfil de temperatura rápidamente converge a una distribución uniforme pero *distinta de cero*. Al principio del ejercicio mencionamos que este problema modela el flujo de calor en una barra aislada; ahora veremos exactamente a qué nos referimos con *aislada*.

S.9.B

La temperatura de la barra para un pequeño segmento denotado por Δx es proporcional a la cantidad de energía térmica contenida en ese segmento. Mientras mayor sea su temperatura, más energía térmica posee. Así, podemos pensar que la integral

$$E(t) = \int_0^1 f(x, t) dx, \quad (647)$$

salvo por constantes, y por supuesto las unidades físicas, representa la energía contenida en la barra. Ahora considere

$$E'(t) = D \left[\int_0^1 f(x, t) dx \right]. \quad (648)$$

La regla integral de Leibniz nos permite derivar bajo el signo integral según

$$D \left[\int_0^1 f(x, t) dx \right] = \int_0^1 \partial_t f(x, t) dx. \quad (649)$$

Sin embargo, como f satisface la ecuación de calor dada por $\partial_t f - \alpha \partial_x^2 f = 0$ entonces

$$\int_0^1 \partial_t f(x, t) dx = \alpha \int_0^1 \partial_x^2 f(x, t) dx \quad (650)$$

y, finalmente, efectuando la integración obtenemos

$$E'(t) = \alpha \cdot (\partial_x f(1, t) - \partial_x f(0, t)) = 0 \quad (651)$$

en virtud de las condiciones de borde impuestas al problema. Esta última ecuación tiene un significado muy importante, pues indica que la integral $E(t)$ es una cantidad conservada. Es decir, se mantiene *constante* a medida que pasa el tiempo. Observe que este resultado **no depende** de la forma particular de la solución f , sino que reposa únicamente sobre el hecho de que f satisface la ecuación de calor y que, además, satisface las condiciones de borde indicadas.

Según los cálculos, la energía contenida en la barra se conserva siempre que

$$\partial_x f(1, t) - \partial_x f(0, t) = 0. \quad (652)$$

Sin embargo, desde un punto de vista físico la energía térmica de la barra ha de conservarse si no puede fluir fuera de ella. ¿Cómo podemos corresponder entonces el enfoque matemático de la conservación de energía con el físico? Veámoslo de esta manera: la ecuación (652) puede satisfacerse de dos formas, tomando

$$\partial_x f(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \partial_x f(0, t) = 0, \quad (653)$$

o bien

$$\partial_x f(1, t) = \partial_x f(0, t), \quad (654)$$

y cada una tiene su propia interpretación física. La primera corresponde a los bordes aislados, y el razonamiento es que *borde aislado* significa un borde a través del cual no puede fluir calor. Como no puede fluir calor, entonces la diferencia de temperatura Δf a medida que x tiende a la frontera (por ejemplo, $x = 0$), debe tender a cero. En otras palabras,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, t) - f(0, t)}{h} = \partial_x f(0, t) = 0. \quad (655)$$

Si esto le resulta confuso, recuerde lo siguiente: el calor solo puede fluir a través de dos regiones si existe una diferencia de temperatura entre ellas, y necesariamente ha de fluir de la región con mayor temperatura hacia la de menor temperatura. Si la diferencia de temperatura es nula no hay flujo de calor, y esta es justamente la restricción que se impone sobre los extremos de la barra al tomar (653). La segunda forma de satisfacer la ecuación ya la hemos visto anteriormente, y corresponde a una condición de borde periódica que actúa no sobre la temperatura f , sino sobre la tasa a la que cambia la temperatura en los extremos de la barra. De esta manera, la condición (654) puede interpretarse como una restricción sobre el flujo de calor, indicando que la energía térmica que se pierde por uno de los extremos debe recuperarse entrando por el otro.

S.10.A

Siguiendo la pista del enunciado, observe que si

$$L = \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2, \quad (656)$$

entonces L puede descomponerse como el producto de dos operadores, L^+ y L^- , según

$$L = L^+ \cdot L^- = (\partial_t + c \partial_x) \cdot (\partial_t - c \partial_x). \quad (657)$$

Así, para que una función u sea solución de la ecuación $Lu = 0$ basta con que sea solución de $L^+u = 0$ o $L^-u = 0$. Las soluciones a

$$L^+u = \partial_t u + c \partial_x u = 0 \quad \text{y} \quad L^-u = \partial_t u - c \partial_x u = 0 \quad (658)$$

pueden ser obtenidas directamente usando los resultados de (479), de forma que dos funciones cualesquiera $F = F(x + ct)$ y $G = G(x - ct)$ son ambas soluciones genéricas de (64). Como consecuencia, la forma general de la solución u es dada por una superposición de ambas soluciones genéricas,

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \quad (659)$$

Más adelante exploraremos el significado físico de la superposición de estas dos soluciones genéricas.

S.10.B

Evaluando para $t = 0$, podemos obtener la primera relación,

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x). \quad (660)$$

De forma similar,

$$\partial_t u(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x). \quad (661)$$

Así, integrando la expresión resulta en

$$\int_0^x F'(s) ds - \int_0^x G'(s) ds = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds, \quad (662)$$

$$F(x) - G(x) = F(0) - G(0) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds. \quad (663)$$

S.10.C

Usando las ecuaciones (663) y (660) podemos despejar a $F(x)$ y $G(x)$. Tomando $C = F(0) - G(0)$ para ahorrar en escritura,

$$F(x) = \frac{C}{2} + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds, \quad (664)$$

$$G(x) = -\frac{C}{2} + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds. \quad (665)$$

Finalmente, reemplazando en la expresión para $u(x, t)$, obtenemos

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \quad (666)$$

$$= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (667)$$

Esta célebre relación es conocida como la fórmula de D'Alembert para la ecuación de onda. Más allá de su valor práctico, esta fórmula permite esclarecer una noción que sugerimos en el ejercicio de la cuerda vibrante: la solución de la ecuación de onda puede escribirse como una superposición de dos pulsos, uno viajando hacia la derecha y otro hacia la izquierda.

S.11

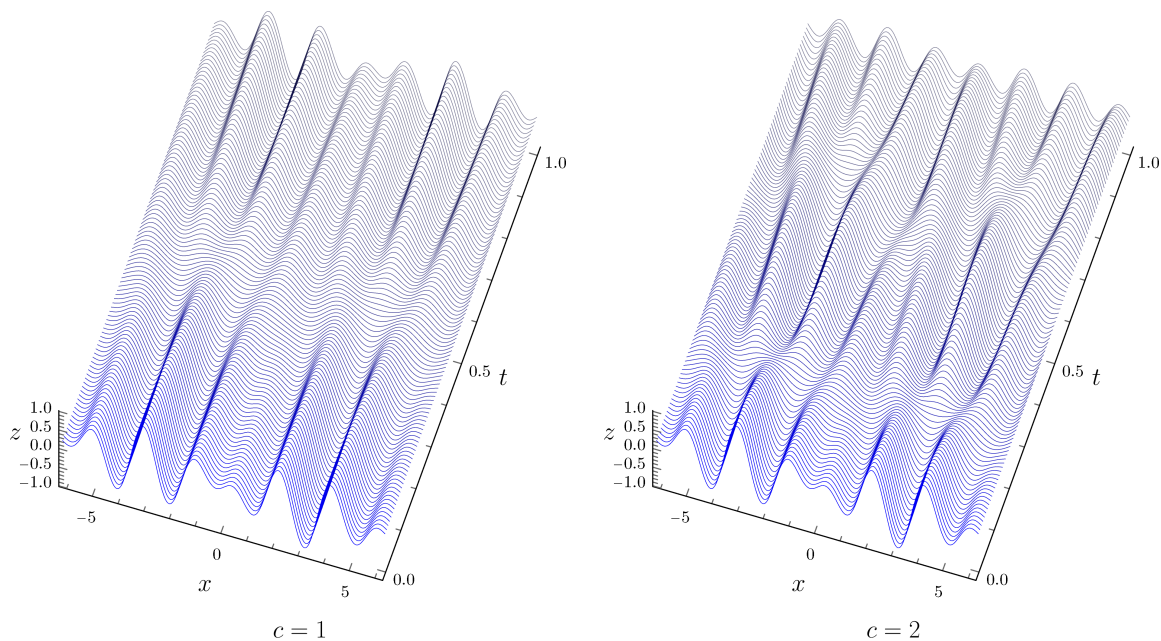
Aplicando la fórmula de D'Alembert obtenida en (667), obtenemos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\cos(3x + 3t) \sin\left(\frac{x+t}{2}\right) + \cos(3x - 3t) \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) \right] \quad (668)$$

es una solución al problema planteado. Como puede ver, si las condiciones del problema son lo suficientemente laxas, la fórmula de D'Alembert provee una solución directa a la ecuación. Si usted conoce la fórmula y el problema en cuestión lo permite, no existe motivo para no utilizarla; es definitivamente el camino más rápido para obtener *una* solución a la ecuación de onda. Si bien es cierto que empleando separación de variables pudimos haber propuesto una solución al problema cuyo valor en $t = 0$ fuese dado en términos de una serie de Fourier trigonométrica de la forma

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + B_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \quad (669)$$

calcular las integrales de los coeficientes nos habría tomado muchísimo más tiempo. A continuación se muestran dos gráficas para $z = u(x, t)$, con $c = 1$ y $c = 2$. Note como al igual que en los problemas anteriores, la forma de u cambia más rápidamente para valores de c mayores, aun siendo esta una solución obtenida mediante la fórmula de D'Alembert. Ciertamente, c no es solo una constante más del problema, sino que caracteriza a la solución de la ecuación de onda independientemente de su forma particular.



S.12.A

La configuración de equilibrio (también llamada *estado estacionario*) de la temperatura ϕ no puede depender de t por un motivo muy simple pero clave: la *condición* de equilibrio implica por si misma que la temperatura de todos los puntos sobre el dominio de solución debe mantenerse constante. Tenga cuidado, pues esto no significa que la temperatura no pueda variar de punto a punto; lo que afirma la condición es que a medida que el sistema dinámico se acerca al equilibrio, el perfil de temperatura ϕ debe cambiar su forma cada vez en menor medida hasta que, finalmente alcanzado el equilibrio, dicho perfil no cambia más. Ese es justamente el significado de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) = \phi_e(x). \quad (670)$$

S.12.B

Concretamente, el problema que debe resolver ϕ_e es

$$D^2\phi_e = 0, \quad \phi_e(0) = A, \quad \phi_e(L) = B. \quad (671)$$

Esta ecuación diferencial es un caso particular (de autovalor nulo) de la ecuación del oscilador armónico, y su solución fue calculada anteriormente en (487). Así, ϕ_e es dada por

$$\phi_e(x) = A + \left(\frac{B-A}{L}\right)x. \quad (672)$$

S.12.C

Una vez encontrada la solución de estado estacionario ϕ_e , es posible definir a una función auxiliar $\psi = \phi - \phi_e$ que nos permita resolver el problema original más fácilmente. Suponga que ϕ es solución del problema de valor inicial, y que en efecto satisface

$$\phi(0, t) = A, \quad \phi(L, t) = B. \quad (673)$$

Así, ψ es también solución de la ecuación de calor, pero bajo condiciones de borde distintas. En particular,

$$\psi(0, t) = \phi(0, t) - \phi_e(0) = 0, \quad \psi(L, t) = \phi(L, t) - \phi_e(L) = 0. \quad (674)$$

Este *nuevo* problema de valor inicial que satisface ψ es precisamente el problema de la barra con extremos a temperatura cero, cuya solución candidata ya hemos calculado anteriormente en (529). Así, $\psi(x, t)$ viene dada por

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (675)$$

donde los coeficientes A_n son los coeficientes de Fourier correspondientes para $g(x) - \phi_e(x)$. Es decir,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - \phi_e(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (676)$$

Finalmente, la función ϕ puede obtenerse despejando:

$$\phi(x, t) = \phi_e(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (677)$$

Como puede ver, obtener la solución de estado estacionario nos permitió transformar el problema original en uno casi trivial. Sin embargo, esta no es la única utilidad de la solución de estado estacionario. En muchos ámbitos de la ingeniería las soluciones de estado estacionario son, por sí solas, de crucial interés. Un ejemplo clásico de esto es el estudio de circuitos RLC, donde las soluciones de estado estacionario proveen información muy valiosa sobre el comportamiento de ciertos circuitos.

S.12.D

Por más que parezca que la anterior es la única manera de obtener el resultado deseado, también es posible usar separación de variables directamente. Considere

$$\phi(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t) \quad (678)$$

donde

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0 \quad \text{y} \quad D\Gamma + \mu\Gamma = 0, \quad (679)$$

de forma que si

$$\mu - \alpha\lambda^2 = 0 \quad (680)$$

entonces ϕ es solución de la ecuación en cuestión. Tal y como hemos calculado en ejercicios anteriores, solo los valores $\lambda^2 \geq 0$ arrojan soluciones acotadas. Así, procedamos primero con $\lambda = 0$. Bajo esta suposición, la solución correspondiente para ϕ es de la forma

$$C + Dx + Et + Fxt. \quad (681)$$

Sin embargo, como $|\phi(x, t)| < \infty$ a medida que $t \rightarrow \infty$, entonces la solución se reduce a

$$C + Dx. \quad (682)$$

Aplicando las condiciones (71), vemos que la solución correspondiente para $\lambda = 0$ es dada por

$$A + \left(\frac{B-A}{L}\right)x. \quad (683)$$

Esta expresión es precisamente la solución de estado estacionario que discutimos en los incisos anteriores. Continuando con $\lambda > 0$, obtenemos que las soluciones de Ω son de la forma

$$G \sin(\lambda x) + K \cos(\lambda x) \quad (684)$$

Note que no es necesario que estas soluciones estén sujetas a (71), pues al ser superpuestas con la solución para $\lambda = 0$ la solución candidata automáticamente satisfaría las condiciones de borde si estas funciones se anulan para $x = 0$, $x = L$. Así, podemos tomar que la familia de soluciones para $\lambda > 0$ venga dada por

$$G_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \geq 1, \quad (685)$$

y de esta manera las soluciones correspondientes para ϕ con $\lambda > 0$ son

$$G_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t/L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (686)$$

A estas alturas, la expresión anterior debería resultarle completamente natural. Proponiendo que la solución candidata para ϕ sea una superposición de las soluciones encontradas,

$$\phi(x, t) = A + \left(\frac{B-A}{L}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t/L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (687)$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$, obtenemos que la serie de fourier trigonométrica resultante debe satisfacer la siguiente igualdad,

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t/L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x) - \left[A + \left(\frac{B-A}{L}\right)x\right]. \quad (688)$$

Por consiguiente, los coeficientes G_n vienen dados por las integrales de Fourier

$$G_n = \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - \phi_e(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (689)$$

donde hemos sustituido

$$\phi_e(x) = A + \left(\frac{B-A}{L}\right)x \quad (690)$$

para ahorrar en escritura. Aquí puede detenerse y verificar que ambos caminos, éste y el anterior, en efecto producen exactamente la misma solución. Aun así, el primer camino es ciertamente más claro respecto al significado de la solución de equilibrio y cómo esta puede interpretarse desde una perspectiva más física que matemática, además de ser ligeramente más rápido.

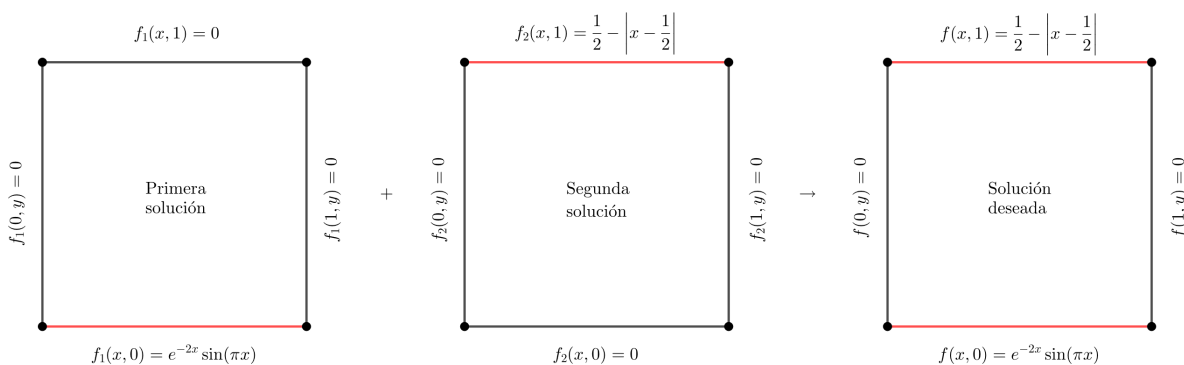
S.13

Antes de apresurarnos a aplicar separación de variables directamente, es importante que tomemos un minuto y utilicemos el conocimiento que hemos adquirido hasta ahora para hacer la resolución lo más clara posible. Como hemos visto en los ejercicios anteriores, nuestra solución vendrá dada en términos de una expansión de las autofunciones del problema y, muy probablemente, involucrará una serie de Fourier sobre un segmento en la frontera del dominio. Sin embargo, esta serie de Fourier puede, a lo sumo, coincidir con *uno* de los bordes del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$. Por ejemplo, si ajustamos los coeficientes de la serie para que coincida con $f(x, 0)$ ciertamente no podrá coincidir con $f(x, 1)$ y viceversa. Sin embargo, esto no significa que el problema no pueda resolverse utilizando separación de variables.

La estrategia para esta clase de problemas es muy astuta: si no es posible hacer que la serie de Fourier de nuestra solución coincida con $f(x, 0)$ y $f(x, 1)$ al mismo tiempo, entonces podemos tomar **dos** soluciones f_1 y f_2 tales que

$$f_1(x, 0) = f(x, 0), \quad f_1(x, 1) = 0 \quad \text{y} \quad f_2(x, 1) = f(x, 1), \quad f_2(x, 0) = 0. \quad (691)$$

De esta manera, si f_1 y f_2 satisfacen el resto de las condiciones de frontera del problema, la suma de estas dos soluciones intermedias provee la solución que buscamos. Intuitivamente, el procedimiento que acabamos de describir consiste en tomar dos soluciones auxiliares que satisfacen la condición de borde de *solo uno* de los segmentos al mismo tiempo, mientras que se anulan sobre el resto de los segmentos de la frontera. Así, al superponer una con la otra, cuando la primera vale $f(x, 0)$ la otra vale cero y, de forma converso, cuando la segunda vale $f(x, 1)$ la primera se anula.



Comencemos resolviendo el *primer* problema intermedio, dado por

$$\nabla^2 f_1 = 0 \quad (692)$$

para x, y sobre el cuadrado unitario, con

$$f_1(x, 0) = e^{-2x} \sin(\pi x), \quad f_1(x, 1) = f_1(0, y) = f_1(1, y) = 0. \quad (693)$$

Empleando separación de variables, considere

$$f_1(x, y) = \Lambda(x) \Theta(y). \quad (694)$$

De esta manera, si

$$D^2 \Lambda + \kappa^2 \Lambda = 0 \quad \text{y} \quad D^2 \Theta + \nu^2 \Theta = 0 \quad (695)$$

entonces f_1 es solución de la ecuación diferencial siempre que

$$\kappa^2 + \nu^2 = 0. \quad (696)$$

Siguiendo un patrón similar al de **S.8**, exploremos primero $\kappa^2 < 0$. Así, $\nu^2 > 0$ y la solución correspondiente para Λ es de la forma

$$A \sinh(\nu x) + B \cosh(\nu x). \quad (697)$$

Aplicando las condiciones de (693), vemos que $f(0, 0) = f(1, 0) = 0$. Sin embargo, esto implica que $A = B = 0$ y, por tanto, $\kappa^2 < 0$ no produce soluciones no triviales para f_1 . Continuando con $\kappa = 0$ obtenemos una situación similar, pues la solución correspondiente para f_1 tiene la forma

$$A + Bx + Cy + Dxy. \quad (698)$$

pero nuevamente las condiciones de borde imponen que las constantes deben anularse. Por consiguiente, $\kappa = 0$ tampoco produce soluciones no triviales para f_1 . Finalmente, considere $\kappa^2 > 0$. Así, $\nu^2 < 0$ y la solución correspondiente para Λ es de la forma

$$A \sin(\kappa x) + B \cos(\kappa x). \quad (699)$$

Aplicando las condiciones de borde, obtenemos que $B = 0$ y la solución se reduce a

$$A \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (700)$$

Recuerde que no es necesario que esta solución coincida exactamente con $f_1(x, 0)$, pues esto se logrará luego utilizando una superposición de soluciones. Por otro lado, a Θ corresponden soluciones de la forma

$$C \sinh(n\pi y) + D \cosh(n\pi y). \quad (701)$$

Aplicando las condiciones una vez más, tal y como en **S.8**, la solución se reduce a

$$\cosh(n\pi y) - \coth(n\pi) \sinh(n\pi y) \quad (702)$$

donde hemos tomado que $\Theta(0) = 1$ por mera conveniencia. De esta manera, la solución correspondiente para f_1 es de la forma

$$A_n [\cosh(n\pi y) - \coth(n\pi) \sinh(n\pi y)] \sin(n\pi x). \quad (703)$$

Entonces, siguiendo el mismo patrón de los ejercicios anteriores, proponemos que f_1 sea una superposición de soluciones genéricas,

$$f_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cosh(n\pi y) - \coth(n\pi) \sinh(n\pi y)] \sin(n\pi x). \quad (704)$$

Finalmente, aplicando la condición $f_1(x, 0) = f(x, 0)$, f_1 es solución del problema intermedio si

$$A_n = 2 \int_0^1 e^{-2x} \sin(\pi x) \sin(n\pi x) dx = \frac{8n\pi^2 (1 + (-1)^n e^{-2})}{\pi^4 (n^2 - 1)^2 + 8\pi^2 (n^2 + 1) + 16}. \quad (705)$$

Una vez determinada la solución para f_1 , ahora debemos seguir exactamente el mismo procedimiento para f_2 . Sin embargo, no se sienta fastidiado por los cálculos. Note que, en esencia, las condiciones de borde tienen exactamente la misma forma: la función f_2 debe anularse para todos los segmentos de la frontera excepto uno. Por tanto, la clase de funciones que constituyen la solución genérica para f_2 debe ser la misma, pero sobre x o y según corresponda. Así, podemos ahorrarnos gran parte del análisis y saltar directamente a las soluciones genéricas. Por tanto, y en virtud del análisis anterior, si

$$f_2(x, y) = \Omega(x)\Gamma(y) \quad (706)$$

entonces Ω y Γ han de tener la forma

$$B \sin(n\pi x) + C \cos(n\pi x) \quad (707)$$

y

$$D \sinh(n\pi y) + E \cosh(n\pi y) \quad (708)$$

respectivamente. Aplicando las condiciones para f_2 ,

$$f_2(x, 1) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|, \quad f_2(x, 0) = f_2(0, y) = f_2(1, y) = 0, \quad (709)$$

obtenemos que la solución correspondiente a f_2 es de la forma

$$B_n \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi x). \quad (710)$$

Tal y como en el problema anterior, proponiendo que f_2 sea una superposición de las soluciones encontradas tenemos

$$f_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi x). \quad (711)$$

Por tanto, f_2 es solución del segundo problema si los coeficientes B_n vienen dados por

$$B_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \sin(n\pi x) dx = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (712)$$

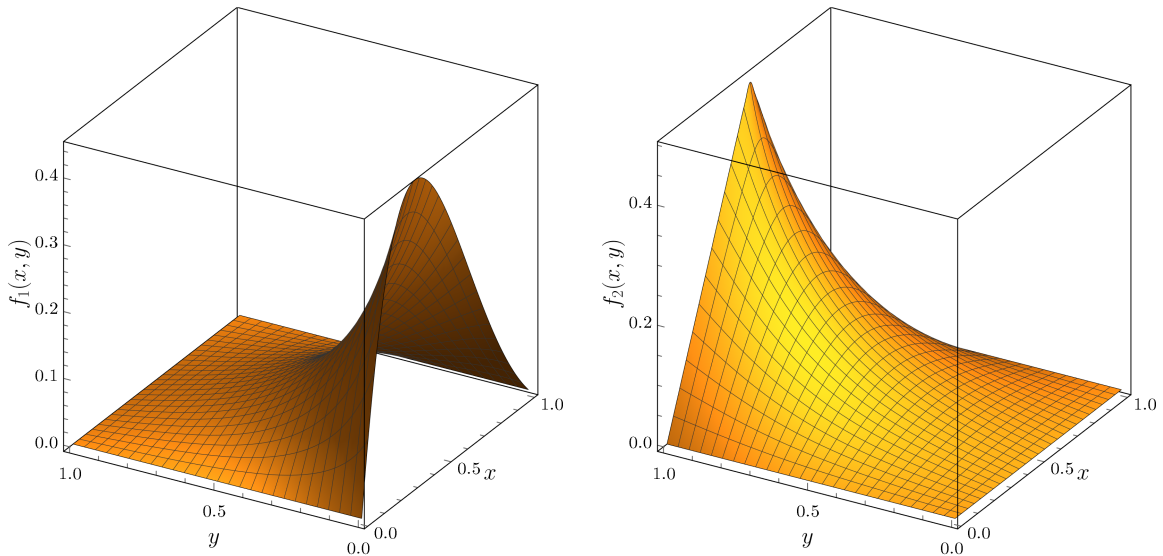
Finalmente juntando ambas soluciones, f_1 y f_2 , obtenemos la solución deseada al problema de valor inicial que pretendíamos resolver al principio,

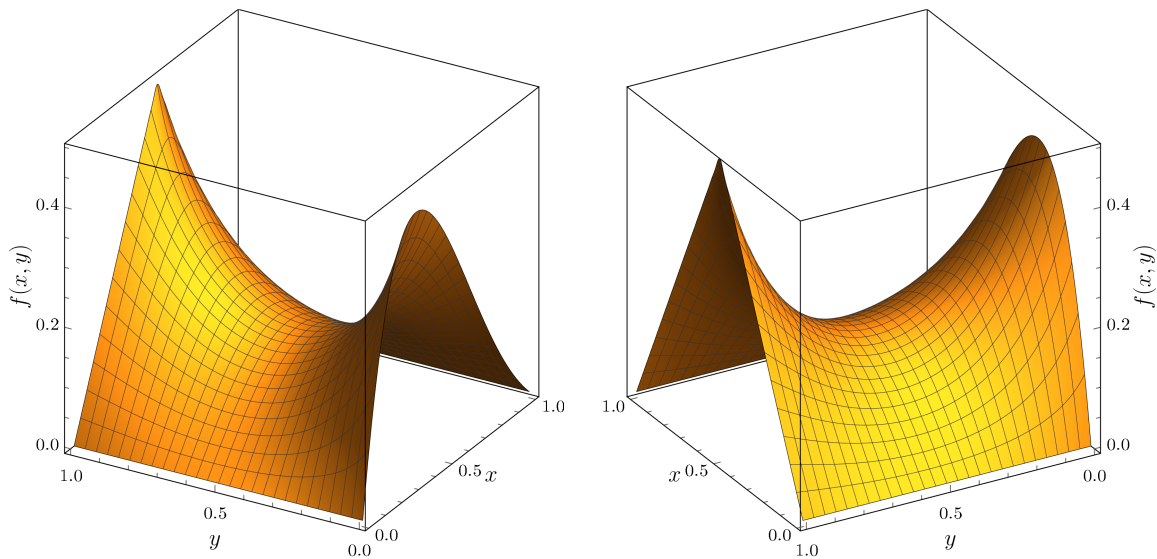
$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cosh(n\pi y) - \coth(n\pi) \sinh(n\pi y)] \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi x), \quad (713)$$

donde

$$A_n = \frac{8n\pi^2 (1 + (-1)^n e^{-2})}{\pi^4 (n^2 - 1)^2 + 8\pi^2 (n^2 + 1) + 16}, \quad B_n = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (714)$$

Esta función, construida a partir de f_1 y f_2 , satisface todos los requerimientos del PVI. La estrategia de dividir el problema original en varios subproblemas, cuya solución es mucho más clara, no solo se limita a dos funciones. El problema podría indicar condiciones de frontera más complejas, el dominio podría ser más intrincado, pero en esencia el enfoque es el mismo: aprovechar la linealidad de las soluciones no solamente para construir soluciones en términos de series de Fourier, sino también para construir soluciones *intermedias* que juntas proveen la solución del problema en cuestión, muchas veces pudiendo reutilizar cálculos y argumentos. Si este método aun no le convence del todo, en la siguiente página se muestran gráficas para f_1 , f_2 y su suma, f .





Como puede observar, la función f toma las formas esperadas sobre los segmentos de frontera correspondientes, y su calidad de solución es garantizada por el hecho de que tanto f_1 como f_2 son soluciones.

S.14.A

Existen muchas maneras de plantear la transformación de un operador diferencial bajo un cambio de coordenadas, empleando distintos enfoques de ciertas ramas del cálculo o geometría diferencial. Sin embargo, es igualmente posible partir de un razonamiento *elemental* y obtener un resultado completamente válido usando la regla de la cadena. Considere una función f definida sobre un dominio cartesiano, $f = f(x, y)$. Si tomamos $\partial_r f$ podemos expandir la expresión según la regla de la cadena como

$$\partial_r f = \partial_r x \cdot \partial_x f + \partial_r y \cdot \partial_y f. \quad (715)$$

De forma similar, $\partial_\theta f$ se expande según

$$\partial_\theta f = \partial_\theta x \cdot \partial_x f + \partial_\theta y \cdot \partial_y f. \quad (716)$$

Observe como, en esencia, hemos obtenido un sistema lineal en términos de $\partial_x f$ y $\partial_y f$, donde todas las otras derivadas parciales son conocidas. En forma matricial, sin embargo, es cuando estas ecuaciones toman un significado mucho más claro:

$$\begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_r y \\ \partial_\theta x & \partial_\theta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_r f \\ \partial_\theta f \end{bmatrix}, \quad (717)$$

es decir, el Jacobiano de la transformación descrita por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (718)$$

es precisamente lo que permite expresar los operadores diferenciales en términos de las nuevas coordenadas. Reemplazando las entradas del Jacobiano por sus valores correspondientes, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_r f \\ \partial_\theta f \end{bmatrix}. \quad (719)$$

De esta manera, siempre que $r > 0$ (¿por qué?) podremos invertir el Jacobiano para encontrar

$$\begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_r f \\ \partial_\theta f \end{bmatrix}. \quad (720)$$

Así, podemos establecer que

$$\partial_x = \cos \theta \cdot \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \cdot \partial_\theta, \quad (721)$$

$$\partial_y = \sin \theta \cdot \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cdot \partial_\theta. \quad (722)$$

S.14.B

Ahora, esta correspondencia entre las derivadas parciales no es suficiente para transformar ciertos operadores diferenciales, como la divergencia o el rotacional. Esto se debe a que intrínsecamente dependen no solo de las derivadas parciales, sino también de los vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas, quienes se ven igualmente afectados por el cambio de coordenadas. Por ejemplo, para el caso particular de las coordenadas polares, los vectores unitarios radial y angular. No obstante el Laplaciano puede expresarse sin necesidad de recurrir a una cantidad vectorial y, por tanto, pueden simplemente sustituirse las derivadas parciales para obtener su forma polar.

El Laplaciano de una función $f = f(x, y)$ en coordenadas cartesianas es dado por

$$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f. \quad (723)$$

Procedamos por partes. Primero, considere

$$\partial_x^2 f. \quad (724)$$

Esta expresión puede reescribirse en forma polar como

$$\left(\cos \theta \cdot \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \cdot \partial_\theta \right) \left(\cos \theta \cdot \partial_r f - \frac{1}{r} \sin \theta \cdot \partial_\theta f \right) \quad (725)$$

Expandiendo y simplificando obtenemos

$$\partial_x^2 f = \left(\cos \theta \cdot \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \cdot \partial_\theta \right) \left(\cos \theta \cdot \partial_r f - \frac{1}{r} \sin \theta \cdot \partial_\theta f \right) \quad (726)$$

$$= \cos^2 \theta \cdot \partial_r^2 f + \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_\theta f - \frac{1}{r} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_r \partial_\theta f + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \cdot \partial_r f - \frac{1}{r} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_\theta \partial_r f \quad (727)$$

$$+ \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_\theta f + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cdot \partial_\theta^2 f. \quad (728)$$

$$= \cos^2 \theta \cdot \partial_r^2 f + \frac{2}{r^2} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_\theta f - \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_r \partial_\theta f + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \cdot \partial_r f + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cdot \partial_\theta^2 f. \quad (729)$$

De forma similar,

$$\partial_y^2 f = \left(\sin \theta \cdot \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cdot \partial_\theta \right) \left(\sin \theta \cdot \partial_r f + \frac{1}{r} \cos \theta \cdot \partial_\theta f \right) \quad (730)$$

$$= \sin^2 \theta \cdot \partial_r^2 f - \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \cdot \partial_\theta f + \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \cdot \partial_r \partial_\theta f + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \cdot \partial_r f + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_\theta \partial_r f \quad (731)$$

$$- \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_\theta f + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \cdot \partial_\theta^2 f. \quad (732)$$

$$= \sin^2 \theta \cdot \partial_r^2 f - \frac{2}{r^2} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_\theta f + \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta \cdot \partial_r \partial_\theta f + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \cdot \partial_r f + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \cdot \partial_\theta^2 f. \quad (733)$$

Sumando ambas expresiones, $\nabla^2 f$ resulta

$$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f = \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 f. \quad (734)$$

Finalmente, y simplificando un poco más, obtenemos la forma más común del Laplaciano en coordenadas polares

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \partial_r (r \cdot \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 f. \quad (735)$$

D.1

Aunque la ecuación parezca intimidante, la estrategia es exactamente la misma de los ejercicios anteriores: aplicar el método de separación de variables para encontrar las autofunciones del operador diferencial y usar dichas autofunciones para construir una solución al problema de valor inicial. Entonces, comencemos por el principio: considere

$$u(x, t) = \Omega(x)\Gamma(t). \quad (736)$$

De esta manera, si

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0 \quad \text{y} \quad D^2\Gamma + (\alpha + \beta)D\Gamma + \alpha\beta\Gamma + \mu^2\Gamma = 0 \quad (737)$$

entonces u es solución de la ecuación diferencial siempre que

$$\mu^2 - c^2\lambda^2 = 0. \quad (738)$$

A estas alturas el problema dado por

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0, \quad \Omega(0) = \Omega(L) = 0 \quad (739)$$

ha sido resuelto decenas de veces y su solución debería ser inmediata para usted. Si no lo es, no entre en pánico; simplemente repase otra vez ejercicios de la sección **S**. En fin, las soluciones correspondientes a Ω son de la forma

$$A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (740)$$

Ahora, centremos nuestra atención en

$$D^2\Gamma + (\alpha + \beta)D\Gamma + \alpha\beta\Gamma + \mu^2\Gamma = 0. \quad (741)$$

Esta es una EDO lineal de segundo orden, y es conocido que su solución general puede obtenerse descomponiendo el operador diferencial según

$$(D - r_+)(D - r_-), \quad (742)$$

donde

$$r_\pm = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta + \mu^2)}. \quad (743)$$

Simplificando la expresión del radical y definiendo $4\omega_n^2 = 4\mu^2 - (\alpha - \beta)^2$, $\sigma = (\alpha + \beta)/2$, obtenemos

$$r_\pm = -\sigma \pm i\omega_n. \quad (744)$$

Así, las solución correspondiente a Γ es de la forma

$$C_n e^{-\sigma t} \sin(\omega_n t) + D_n e^{-\sigma t} \cos(\omega_n t), \quad (745)$$

aunque será preferible emplear la forma alternativa del coseno desfasado

$$D_n e^{-\sigma t} \cos(\omega_n t - \phi_n). \quad (746)$$

Aplicando la condición $\partial_t u(x, 0) = 0$, encontramos que

$$-\sigma \cos(\phi_n) + \omega_n \sin(\phi_n) = 0 \implies \phi_n = \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right) \quad (747)$$

y por tanto, la solución para u es de la forma

$$A_n e^{-\sigma t} \cos(\omega_n t - \phi_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (748)$$

donde A_n ha absorbido el producto de las constantes correspondientes y

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2, \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right). \quad (749)$$

A continuación, y como es costumbre, propongamos que u sea una superposición de las soluciones encontradas,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sigma t} \cos(\omega_n t - \phi_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (750)$$

De esta manera, si

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\epsilon^{-1}, & L/2 - \epsilon \leq x < L/2 \\ \epsilon^{-1}, & L/2 \leq x \leq L/2 + \epsilon \end{cases} \quad (751)$$

para $0 < \epsilon < L/2$, entonces u es solución si las constantes A_n satisfacen

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\phi_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \quad (752)$$

es decir, si vienen dada por las integrales de Fourier correspondientes (sin olvidar el factor adicional $\cos(\phi_n)$)

$$A_n = \frac{2}{L \cos(\phi_n)} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{4 \sec(\phi_n)}{n\pi \epsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi \epsilon}{L}\right)\right]. \quad (753)$$

Con esto podemos dar por terminados los cálculos. La solución deseada u al problema de valor inicial no es más que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sigma t} \cos(\omega_n t - \phi_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (754)$$

donde los A_n satisfacen (753).

D.2.A

La estrategia de resolución mediante separación de variables que hemos mantenido hasta ahora, útil para las EDP homogéneas, no nos servirá para abordar problemas no homogéneos. Aplicar directamente el método de separación de variables sería inútil, pues tendríamos un término extra, no constante, en nuestra ecuación de autovalores. A pesar de esto, no todo está perdido. Nuevamente, el concepto central de la *expansión en autofunciones* provee la luz necesaria para atravesar este obstáculo.

En el caso homogéneo de la ecuación de calor más de una vez acabamos con una expresión de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \phi_n(x); \quad (755)$$

es decir, una superposición de soluciones genéricas dadas por los productos $\Gamma_n \cdot \phi_n$, que resultaban del método de separación de variables. Las funciones Γ_n tomaban la forma de exponenciales decrecientes, mientras que las ϕ_n tomaban la forma de funciones trigonométricas que, convenientemente, permitían ajustar la superposición de soluciones al perfil inicial de temperatura mediante la teoría de las series de Fourier. Claramente no podemos utilizar las mismas funciones resultantes del método de separación de variables, pues tal relación ya no es válida. Pero podemos usar nuestro conocimiento de la solución homogénea para proponer que la solución al problema

sea una superposición similar, y trabajar de adelante hacia atrás generalizando nuestra solución. Más aún, note que las funciones ϕ_n , de forma trigonométrica, siguen jugando un papel en nuestra solución generalizada, pues si

$$D^2\phi_n + \lambda_n^2\phi_n = 0 \quad (756)$$

entonces u automáticamente satisface las condiciones $u(0, t) = u(L, t) = 0$ si ϕ_n es de la forma

$$A_n \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (757)$$

Empleando este resultado, y absorbiendo por el momento las constantes arbitrarias dentro de las funciones Γ_n , podemos dar nuestro primer paso en la resolución tomando que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (758)$$

D.2.B

Reemplazando en la ecuación de calor no homogénea, obtenemos la relación

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t \Gamma_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Gamma_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (759)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\Gamma_n(t) + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Gamma_n(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (760)$$

Idealmente, quisiéramos poder encontrar una forma de corresponder uno a uno las funciones Γ_n de la serie con f , pero en su forma actual no es posible. Sin embargo, existe una manera. Nunca pierda de vista el tema central: la *expansión en autofunciones*. ¿Puede expandirse a $f(x, t)$ en términos de las autofunciones $\phi_n(x)$? Pues claro, en una serie de Fourier de la forma

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (761)$$

donde los coeficientes f_n , que en realidad son funciones de t , vienen dados por

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (762)$$

Si se pregunta por qué la integral de Fourier está multiplicada por 2, recuerde que esta es, implícitamente, la integral sobre la extensión impar de f tal y como en los ejercicios anteriores. De esta manera, nuestra relación original toma la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\Gamma_n(t) + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Gamma_n(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (763)$$

y así, ambas expresiones son equivalentes siempre que las funciones Γ_n satisfagan la EDO de primer orden

$$D\Gamma_n + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Gamma_n = f_n. \quad (764)$$

Sin embargo, aún falta una pieza final para esta EDO, pues es necesario un valor inicial $\Gamma_n(0)$ para determinar totalmente dichas funciones. Recordando que $u(x, 0) = g(x)$ y descomponiendo a g de la misma manera que f , el valor inicial de $\Gamma_n(0)$ puede ser obtenido observando que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x). \quad (765)$$

Por consiguiente,

$$\Gamma_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (766)$$

Finalmente, la solución deseada u para el problema no homogéneo es dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (767)$$

donde las funciones Γ_n son las soluciones al problema de valor inicial

$$D\Gamma_n + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Gamma_n = f_n, \quad \Gamma_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (768)$$

Por el momento, la forma explícita de las funciones Γ_n no es necesaria. Basta con saber que la teoría de las EDO aseguran que dichas soluciones son únicas, y que ya existe una fórmula general para ellas de ser necesario.

D.2.C

Con todos los resultados requeridos a mano, encontrar una solución al PVI es cuestión de carpintería. Comencemos por encontrar los valores iniciales para Γ_n ,

$$\Gamma_n(0) = 2 \int_0^1 g(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (769)$$

De forma similar, los coeficientes de la expansión de f vienen dados por

$$f_n(t) = 2 \int_0^1 \frac{\cos(\pi x - t)}{2\pi} \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sin(t), & n = 1 \\ \frac{n(1 + (-1)^n)}{\pi^2(n^2 - 1)} \cos(t), & n > 1. \end{cases} \quad (770)$$

Una vez determinados los coeficientes necesarios, podemos aplicar la fórmula para EDOs de primer orden y obtener a Γ_n . Procediendo por casos, para $n = 1$ tenemos

$$\Gamma_1(t) = \frac{4}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-\alpha\pi^2 t} + \frac{e^{-\alpha\pi^2 t}}{2\pi} \int_0^t e^{\alpha\pi^2 \mu} \sin(\mu) d\mu \quad (771)$$

$$= \frac{4}{\pi^2} e^{-\alpha\pi^2 t} + \frac{e^{-\alpha\pi^2 t}}{2\pi} \cdot \frac{1 + e^{\alpha\pi^2 t} (\alpha\pi^2 \sin(t) - \cos(t))}{1 + \alpha^2\pi^4} \quad (772)$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi(1 + \alpha^2\pi^4)} + \frac{4}{\pi^2} \right] e^{-\alpha\pi^2 t} + \frac{\alpha\pi^2 \sin(t) - \cos(t)}{2\pi(1 + \alpha^2\pi^4)}. \quad (773)$$

Luego, para $n > 1$

$$\Gamma_n(t) = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-\alpha n^2\pi^2 t} + \frac{n(1 + (-1)^n)}{\pi^2(n^2 - 1)} \cdot e^{-\alpha n^2\pi^2 t} \int_0^t e^{\alpha n^2\pi^2 \mu} \cos(\mu) d\mu \quad (774)$$

$$= \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\alpha n^3(1 + (-1)^n)}{(n^2 - 1)(1 + \alpha^2 n^4 \pi^4)} \right] e^{-\alpha n^2\pi^2 t} + \frac{n(1 + (-1)^n)(\alpha n^2 \pi^2 \cos(t) + \sin(t))}{\pi^2(n^2 - 1)(1 + \alpha^2 n^4 \pi^4)}. \quad (775)$$

Si, tener las fórmulas convierte el resto de los cálculos en carpintería, pero nunca dijimos que sería *poca* carpintería. No obstante, ahora tenemos una solución al problema de valor inicial para la ecuación de calor no homogénea dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (776)$$

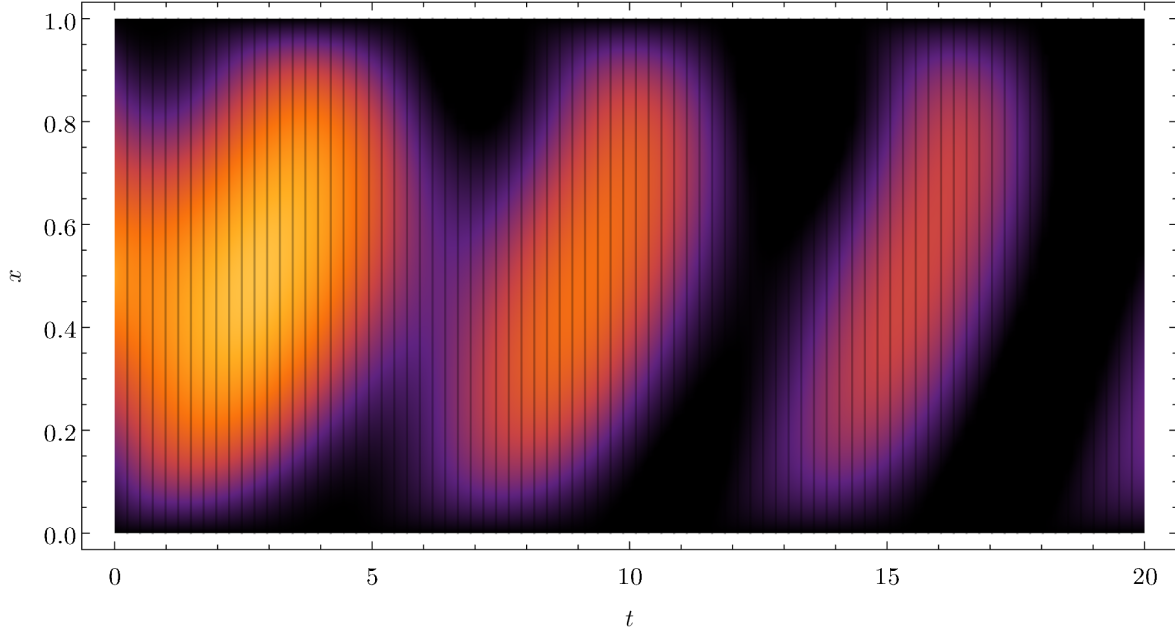
donde las funciones $\Gamma_n(t)$ vienen dadas por

$$\Gamma_n(t) = \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\alpha n^3(1+(-1)^n)}{(n^2-1)(1+\alpha^2 n^4\pi^4)} \right] e^{-\alpha n^2\pi^2 t} + \frac{n(1+(-1)^n)(\alpha n^2\pi^2 \cos(t) + \sin(t))}{\pi^2(n^2-1)(1+\alpha^2 n^4\pi^4)}, \quad (777)$$

para $n > 1$ y

$$\Gamma_1(t) = \left[\frac{1}{2\pi(1+\alpha^2\pi^4)} + \frac{4}{\pi^2} \right] e^{-\alpha\pi^2 t} + \frac{\alpha\pi^2 \sin(t) - \cos(t)}{2\pi(1+\alpha^2\pi^4)}. \quad (778)$$

Como recompensa por su arduo trabajo, a continuación se muestra una gráfica de $z = u(x, t)$ (en forma de mapa de calor) para $\alpha = 10^{-2}$.



Observe como, a diferencia de la ecuación homogénea, la temperatura de la barra no solo experimenta difusión sino que también es afectada por el término forzado $f(x, t)$.

D.3

Antes de comenzar, quisiera pedirle al lector que no se sienta intimidado por el hecho de que este problema esté planteado en coordenadas polares. Como lo indica el enunciado la estrategia es exactamente la misma, aunque las ecuaciones resultantes sean un tanto diferentes. Si está leyendo esto y no ha intentado resolverlo aún, ya sea porque duda de sus habilidades o porque le parece una pérdida de tiempo, le sugiero que vuelva al enunciado y lo intente; confíe en sus habilidades y resuelva las dudas que tenga con el material teórico a su disposición, pero no se dé por vencido.

Procedamos con la solución: primero, reescribamos la ecuación en una forma más amigable aprovechando que $r > 0$ como

$$r\partial_r u + r^2\partial_r^2 u + \partial_\theta^2 u = 0. \quad (779)$$

Ahora, apliquemos el método de separación de variables. Sea

$$u(r, \theta) = \Omega(r)\Gamma(\theta). \quad (780)$$

De esta manera, si

$$r^2 D^2 \Omega + r D \Omega + \lambda^2 \Omega = 0, \quad y \quad D^2 \Gamma + \mu^2 \Gamma = 0 \quad (781)$$

entonces u es solución de la ecuación diferencial siempre que

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0. \quad (782)$$

La condición de periodicidad sobre u , $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$, implica que Γ ha de ser 2π -periódica. Así, las soluciones para Γ corresponden a $\mu^2 \geq 0$, pues solo estos valores de μ arrojan funciones periódicas (funciones constantes o trigonométricas). Reemplazando $\lambda^2 = -\mu^2$, la solución correspondiente a Ω puede encontrarse observando que

$$r^2 D^2 \Omega + r D \Omega - \mu^2 \Omega = 0 \quad (783)$$

es una ecuación diferencial de tipo Cauchy-Euler. Para $\mu^2 > 0$, sustituyendo la solución de prueba r^m obtenemos la ecuación auxiliar

$$m(m-1) + m - \mu^2 = 0, \quad (784)$$

y de aquí que r^m es solución siempre que $m = \pm\mu$. De esta manera, la solución correspondiente a Ω es de la forma

$$Ar^\mu + Br^{-\mu}. \quad (785)$$

Sin embargo, note que $r^{-\mu}$ no es una solución válida para Ω pues $r^{-\mu} \rightarrow \infty$ a medida que $r \rightarrow 0$. Por consiguiente, la solución se reduce a

$$Ar^\mu. \quad (786)$$

Para $\mu = 0$, la solución a la ecuación de Cauchy-Euler puede ser obtenida mediante reducción de orden o integración directa como

$$C \ln(r) + D. \quad (787)$$

Sin embargo, empleando el mismo argumento que usamos para $r^{-\mu}$ determinamos que $C = 0$, pues $\ln(r) \rightarrow -\infty$ a medida que $r \rightarrow 0$. Juntando los resultados de Γ y Ω , obtenemos que la solución para u es de la forma

$$A_0 + r^n (A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (788)$$

donde $n = 0$ corresponde a la solución constante ($\mu = 0$). Como es costumbre en el método de separación de variables, propongamos que u sea una superposición de las soluciones encontradas,

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)). \quad (789)$$

Tomando

$$u(1, \theta) = \frac{1}{8} \left(\frac{35}{\pi^4} \theta^4 - \frac{30}{\pi^2} \theta^2 + 3 \right) = P \left(\frac{\theta}{\pi} \right), \quad (790)$$

lo único que hace falta para que u sea solución del problema de valor inicial es que los coeficientes de la serie

$$u(1, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta) \quad (791)$$

vengan dados según las integrales de Fourier

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P \left(\frac{\theta}{\pi} \right) d\theta = 0, \quad (792)$$

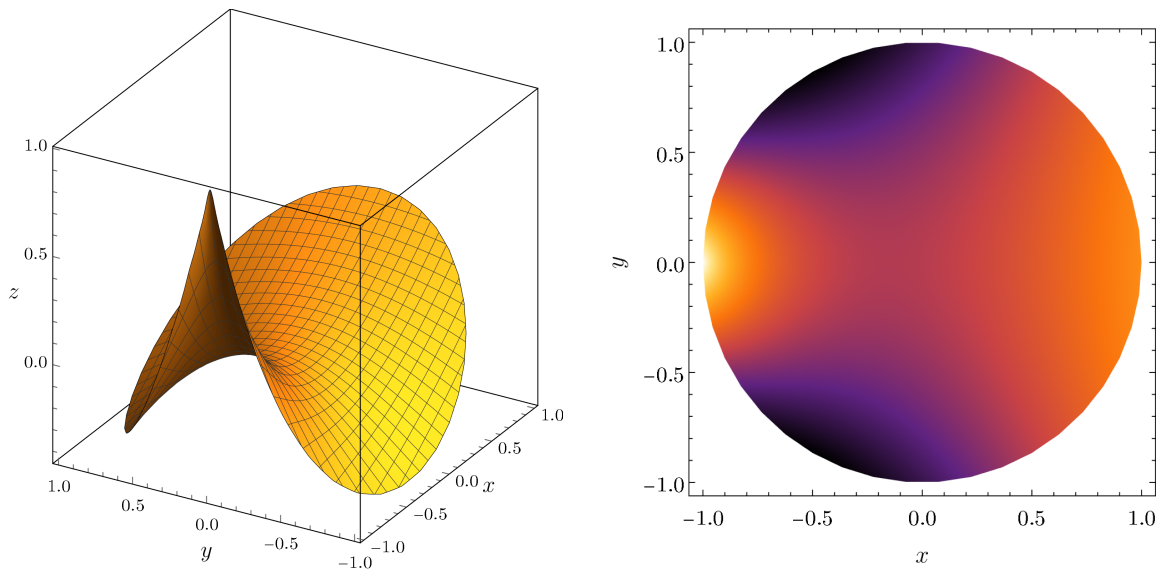
$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P \left(\frac{\theta}{\pi} \right) \sin(n\theta) d\theta = 0, \quad (793)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P \left(\frac{\theta}{\pi} \right) \cos(n\theta) d\theta = \frac{10(-1)^n (2n^2 \pi^2 - 21)}{n^4 \pi^4}. \quad (794)$$

Finalmente, la solución deseada u es

$$u(r, \theta) = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2\pi^2 - 21)}{n^4\pi^4} r^n \cos(n\theta). \quad (795)$$

Como puede apreciar, no fue necesario ningún análisis especial ni alguna especie de truco. Fue, sin más, otra aplicación de la misma estrategia de separación de variables. Este problema, popularmente conocido como el problema de Dirichlet en el disco unitario, es una versión más chica (léase como *para menor número de dimensiones*) del problema general de Dirichlet, ya sobre dominios esféricos n -dimensionales. las soluciones a este problema son de gran utilidad en la física matemática y especialmente para la teoría electromagnética, pues el caso tridimensional describe el potencial electrostático en el vacío. Aunque todo esto le parezca complicado y retorcido, note como la separación de variables descompone la totalidad del problema en pequeños subproblemas mucho más amenos, y francamente más accesibles. La separación de variables, y más generalmente la expansión en autofunciones, es una herramienta en extremo potente que usted ahora posee. Repitiendo una vez más lo que ya hemos advertido en el comienzo del ejercicio: no dude de sus habilidades; la separación de variables es su amiga y le llevará muy lejos en su carrera. A continuación, y para despejar cualquier duda que pueda tener sobre la validez de los cálculos, se muestran gráficas de $z = u(r, \theta)$.



D.4

Como es usual, procedamos con la separación de variables. Considere

$$u = \Omega(x)\Gamma(y). \quad (796)$$

De esta manera, si

$$D^2\Omega + \lambda^2\Omega = 0 \quad \text{y} \quad D^2\Gamma + \mu^2\Gamma = 0 \quad (797)$$

entonces u es solución de la ecuación diferencial siempre que

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0. \quad (798)$$

Anteriormente, hemos resuelto un problema de valor inicial para la ecuación de Laplace bastante similar en **S.13**. La estrategia para este ejercicio será idéntica: separar el problema principal en tres problemas auxiliares

según las condiciones en cada segmento de la frontera y luego tomar una superposición de las soluciones auxiliares para encontrar u . Así, tome u_1 , u_2 y u_3 como las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace y

$$u_1(x, -\pi) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (799)$$

$$u_2(-\pi, y) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (800)$$

$$u_3(\pi, y) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (801)$$

respectivamente, además de anularse en los segmentos restantes de la frontera según corresponda. Para u_1 , y siguiendo el análisis descrito en **S.13** sobre los autovalores y soluciones admitidas, obtenemos que la solución es de la forma

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left(\frac{\cosh(ny)}{\cosh(n\pi)} - \frac{\sinh(ny)}{\sinh(n\pi)} \right) \sin\left[\frac{n(x+\pi)}{2}\right], \quad (802)$$

donde

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left[\frac{n(x+\pi)}{2}\right] dx = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\pi)}{1-n^2}, & n > 1. \end{cases} \quad (803)$$

Note que las funciones seno de la expansión de Fourier se encuentran desplazadas. Esto se debe a la naturaleza del dominio de solución, y es tratado en ejercicios como **S.7**. Luego u_2 puede determinarse siguiendo un patrón idéntico. Recuerde, es exactamente la misma clase de problema, solo que para u_2 y u_3 el papel de las coordenadas x y y se invierte. Aún así, el argumento es igualmente válido. Por consiguiente, u_2 es dada por

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left(\frac{\sinh(nx)}{\sinh(n\pi)} - \frac{\cosh(nx)}{\cosh(n\pi)} \right) \sin\left[\frac{n(y+\pi)}{2}\right] \quad (804)$$

y de forma similar, u_3 es dada por

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{A_n}{2} \left(\frac{\sinh(nx)}{\sinh(n\pi)} + \frac{\cosh(nx)}{\cosh(n\pi)} \right) \sin\left[\frac{n(y+\pi)}{2}\right]. \quad (805)$$

Finalmente, sumando las tres soluciones auxiliares obtenemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left(\frac{\cosh(ny)}{\cosh(n\pi)} - \frac{\sinh(ny)}{\sinh(n\pi)} \right) \sin\left[\frac{n(x+\pi)}{2}\right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{\cosh(nx)}{\cosh(n\pi)} \sin\left[\frac{n(y+\pi)}{2}\right]. \quad (806)$$

Esta es la solución deseada. Como puede observar, este método de descomposición no solo nos permite resolver problemas más chicos para encontrar soluciones al problema original, sino además nos permite reciclar parte de los análisis y resultados acelerando en gran medida los cálculos.

D.5

Procedamos con separación de variables, como es usual. Considere

$$u(r, \theta) = \Omega(r)\Gamma(\theta). \quad (807)$$

Así, y recordando la forma polar de la ecuación de Laplace según (735), si

$$r^2 D^2 \Omega + r D \Omega + \lambda^2 \Omega = 0, \quad \text{y} \quad D^2 \Gamma + \mu^2 \Gamma = 0 \quad (808)$$

entonces u es solución de la ecuación diferencial siempre que

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0. \quad (809)$$

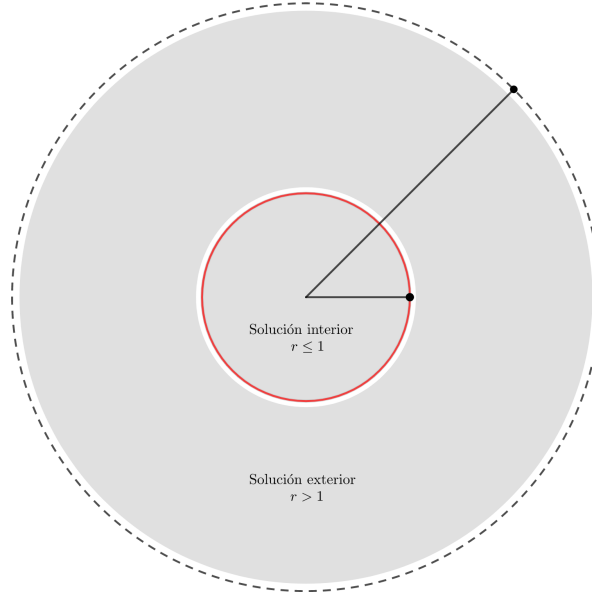
Un problema muy similar a este ya fue resuelto en **D.3**, pero existe una diferencia sutil: el ejercicio anterior involucraba una función definida únicamente para $r < 1$, mientras que ahora el problema en cuestión se extiende sobre la semirrecta real. Si seguimos el análisis de autovalores de **D.3** al pie de la letra para tratar de avanzar con este, llegaremos a un problema evidente: las funciones de la forma

$$Ar^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (810)$$

se mantienen acotadas a medida que $r \rightarrow 0$, pero no cuando $r \rightarrow \infty$. De forma converso, las funciones

$$Ar^{-n} \quad (811)$$

sufren de un dilema similar: se mantienen acotadas a medida que $r \rightarrow \infty$, pero no cuando $r \rightarrow 0$. A pesar de que esto parezca indicar que las expresiones para Ω y Γ admitidas según **D.3** no proveen ninguna solución viable al problema, existe una forma muy astuta de esquivar este obstáculo. Si unas funciones son viables solo para $r \leq 1$ y otras solo para $r > 1$, entonces podemos plantear la solución completa en términos de una función a trozos usando *dos* soluciones auxiliares; una para $r \leq 1$ y otra para $r > 1$. Llamaremos a estas soluciones auxiliares la *solución interior* y *solución exterior*, respectivamente.



Así, consideremos primero la solución para $r \leq 1$. Como este es propiamente el problema resuelto en **D.3**, podemos proponer que u tenga la forma de la solución descrita en (789):

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)), \quad r \leq 1. \quad (812)$$

De esta manera, los coeficientes A_n y B_n pueden determinarse mediante las integrales de Fourier correspondientes según los valores de u sobre $r = 1$.

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \theta) d\theta = -\frac{2}{15\pi}, \quad (813)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \theta) \sin(n\theta) d\theta = 0, \quad (814)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \theta) \cos(n\theta) d\theta = -\frac{4(4n^2 + 15)}{\pi(16n^4 - 136n^2 + 225)}. \quad (815)$$

Por consiguiente, u es dada por

$$u(r, \theta) = -\frac{2}{15\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4(4n^2 + 15)}{\pi(16n^4 - 136n^2 + 225)} \cdot r^n \cos(n\theta) \quad (816)$$

para $r \leq 1$. Ahora, consideremos la solución para $r > 1$. La expansión correspondiente ha de tener una forma casi idéntica a (812), pues los autovalores admitidos siguen siendo los mismos. Lo único que debería cambiar son las funciones r^n , reemplazadas en el caso $r > 1$ por r^{-n} dado que estas sí se mantienen acotadas a medida que $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto, u ha de tener la forma

$$u(r, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta)) \quad (817)$$

para $r > 1$. Luego, como u debe ser continua en $r = 1$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} u(r, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta) = u(1, \theta). \quad (818)$$

Pero esto implica que $C_0 = A_0$, $C_n = A_n$ y $D_n = B_n$, pues las ecuaciones para cada uno son exactamente idénticas a su contraparte de $r \leq 1$. De aquí que

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)) \quad (819)$$

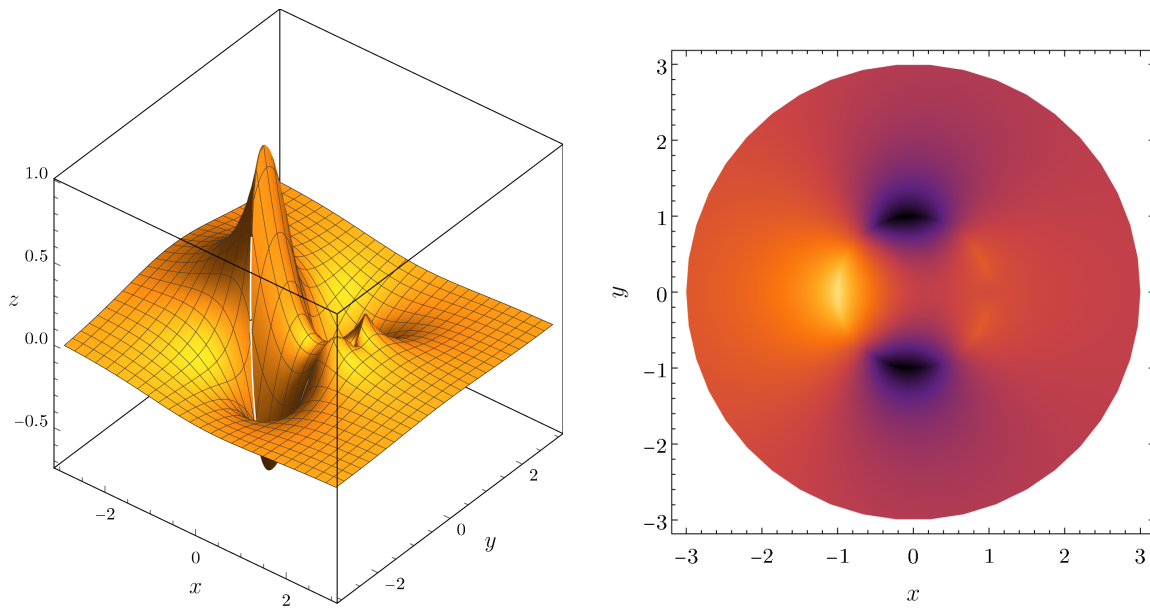
para $r > 1$. Finalmente, la solución deseada para u sobre el dominio completo es dada por una función a trozos,

$$u(r, \theta) = \begin{cases} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \phi_n(\theta), & r \leq 1, \\ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \phi_n(\theta), & r > 1, \end{cases} \quad (820)$$

donde

$$\phi_n(\theta) = B_n \cos(n\theta). \quad (821)$$

En esta forma explícita, podemos observar algo interesante sobre la solución. Observe como, para ambos casos, las funciones que describen el comportamiento angular de la solución son exactamente las mismas. Esto, aunque solo haya saltado a la vista ahora, es algo completamente razonable; las ecuaciones en términos de θ son las mismas para ambos casos sobre r , pero a diferencia de la coordenada radial no experimentan corte alguno. Así, el componente angular de la solución debe permanecer igual, tal y como puede observarse en el resultado final. Si prestó atención durante la resolución del ejercicio, seguramente se pregunte lo siguiente: ¿qué sucedió con las soluciones en términos del logaritmo? ¿por qué no aparecen? La respuesta es sencilla, pues así como $\ln(r) \rightarrow -\infty$ a medida que $r \rightarrow 0$, también sucede que $\ln(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$. Como consecuencia, las soluciones logarítmicas no son admitidas en ninguno de los dominios de solución y por eso no aparecen. Por último, a continuación se presentan dos gráficas para $z = u(x, y)$ con $0 < r < 3$.



E.1

Para comenzar con el procedimiento, considere que cada punto del dominio polar, (r, θ) , corresponde a un único número complejo z dado por $z = re^{i\theta}$. Así, observe como, según la fórmula de De Moivre,

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \quad (822)$$

Comparando directamente con (98), podemos establecer que

$$r^n \sin(n\theta) = \text{Im}(z^n), \quad \text{y} \quad r^n \cos(n\theta) = \text{Re}(z^n). \quad (823)$$

Sin embargo, como $\text{Im}(z^n) = \text{Re}(-iz^n)$, entonces podemos reescribir la siguiente expresión como

$$A_n r^n \sin(n\theta) + B_n r^n \cos(n\theta) = A_n \text{Re}(-iz^n) + B_n \text{Re}(z^n) = \text{Re}[(B_n - iA_n)z^n], \quad (824)$$

dado que A_n y B_n son constantes reales. Sustituyendo en la solución general u , obtenemos

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}[(B_n - iA_n)z^n] = \text{Re} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n - iA_n)z^n \right]. \quad (825)$$

Ahora, note como la expresión

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n - iA_n)z^n \quad (826)$$

justamente describe a una función compleja analítica; por definición, una función analítica es aquella que puede escribirse en términos de una serie de potencias convergente alrededor de un punto dado. En este caso, el punto es cero, y la convergencia de la serie es garantizada por la convergencia de la serie original y la naturaleza de los coeficientes de la serie. Por tanto, si definimos

$$f(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n - iA_n)z^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad (827)$$

para $|z| < 1$, entonces u puede reescribirse en la forma deseada como

$$u(r, \theta) = \text{Re} [f(re^{i\theta})]. \quad (828)$$

E.2.A

Considere

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(n\theta) + B_n r^n \cos(n\theta). \quad (829)$$

Aunque el ejercicio al principio parezca intimidante, no se preocupe. Lo que sigue a continuación no es más que una reescritura astuta de hechos que ya conoce. Dado que u es, como lo indica el enunciado, solución a la ecuación de Laplace sobre el disco unitario con $u(1, \theta) = h(\theta)$ entonces los coeficientes A_0 , A_n y B_n vienen dados según las integrales de Fourier

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) d\mu, \quad (830)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \sin(n\mu) d\mu, \quad (831)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \cos(n\mu) d\mu. \quad (832)$$

Reemplazando las expresiones en (829) y agrupando, obtenemos

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \sin(n\mu) d\mu + r^n \cos(n\theta) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \cos(n\mu) d\mu \quad (833)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\sin(n\theta) \sin(n\mu) + \cos(n\theta) \cos(n\mu)) \right] d\mu \quad (834)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta - n\mu) \right] d\mu, \quad (835)$$

que es precisamente el resultado deseado.

E.2.B

La ecuación anterior parece sugerir que existe una forma mucho más compacta (o más bien *concisa*) de escribir a u en términos de una integral. Para proceder con la simplificación tomemos $\phi = \theta - \mu$, de manera que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\phi) \right] d\mu. \quad (836)$$

Así, la suma infinita que parece dar tanto problema puede descomponerse en dos mucho más amenas reemplazando

$$\cos(n\phi) = \frac{e^{in\phi} + e^{-in\phi}}{2}. \quad (837)$$

Luego, el término entre corchetes se torna

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\phi} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\phi}. \quad (838)$$

Pero cada una de estas series puede escribirse como una suma geométrica tomando

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} (re^{i\phi})^n = \frac{1}{1 - re^{i\phi}} - 1. \quad (839)$$

Sustituyendo para cada una de las series, la expresión resulta

$$\frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{1 - re^{i\phi}} + \frac{1}{1 - re^{-i\phi}} \right) \quad (840)$$

Efectuando las sumas y simplificando,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - re^{-i\phi} - re^{i\phi} + r^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \phi + r^2}. \quad (841)$$

Finalmente, sustituyendo en (836) y reemplazando a ϕ obtenemos la fórmula deseada:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \mu)} d\mu. \quad (842)$$

Esta expresión es conocida como la fórmula integral de Poisson, y es muy popular en física y matemática. Más allá de su evidente practicidad, describiendo directamente la solución a la ecuación de Laplace sobre el disco, sirve como punto de apoyo para generalizaciones del problema de Dirichlet a n dimensiones y el estudio de las funciones de Green asociadas. Sin embargo, y concentrándonos ahora en propiedades más elementales, observe como a partir de esta fórmula no es difícil ver que

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(1, \mu) d\mu. \quad (843)$$

Este resultado, aparentemente inofensivo, es explorado con más detalle en el siguiente ejercicio. Luego veremos como una fórmula similar a esta es válida no solo para $r \rightarrow 0$, sino para cualquier punto arbitrario sobre el dominio de solución.

E.3.A

Puede argumentarse que U es armónica sobre $D_0(1)$ (el disco unitario) observando que,

$$\nabla^2 U = a^2 \nabla^2 u. \quad (844)$$

Así, $U(x, y)$ es armónica siempre que $u(x_0 + ax, y_0 + ay)$ sea armónica. Es decir, para valores de x, y tales que

$$(x_0 + ax, y_0 + ay) \in D_p(a). \quad (845)$$

Estos valores son justamente los que satisfacen

$$[(x_0 + ax) - x_0]^2 + [(y_0 + ay) - y_0]^2 < a^2 \quad (846)$$

Simplificando y tomando factor común a^2 , obtenemos que x y y han de satisfacer

$$x^2 + y^2 < 1. \quad (847)$$

Por tanto, U es armónica sobre todos los x, y que satisfacen (847), que es precisamente $D_0(1)$. Intuitivamente, lo que hemos logrado es razonar que si u es armónica sobre un disco arbitrario (centro y radio arbitrarios) $D_p(a)$, entonces U , que no es más que una función auxiliar centrada en p y escalada, es armónica con respecto al centro del disco, y para puntos a menos de una unidad de distancia.

E.3.B

Tal y como indicamos en (843), la fórmula integral de Poisson nos permite establecer que

$$U(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta \quad (848)$$

pues $x, y \rightarrow 0$ a su vez implica $r \rightarrow 0$. Por consiguiente, y reemplazando a U en términos de u

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + a \cos(\theta), y_0 + a \sin(\theta)) d\theta. \quad (849)$$

Esta no es más que la integral de u sobre un camino circular centrado en $p = (x_0, y_0)$ y de radio a . Así, podemos escribir también la forma libre de coordenadas, recordando que el elemento diferencial de línea sobre el camino circular es dado por $ds = a d\theta$. Finalmente,

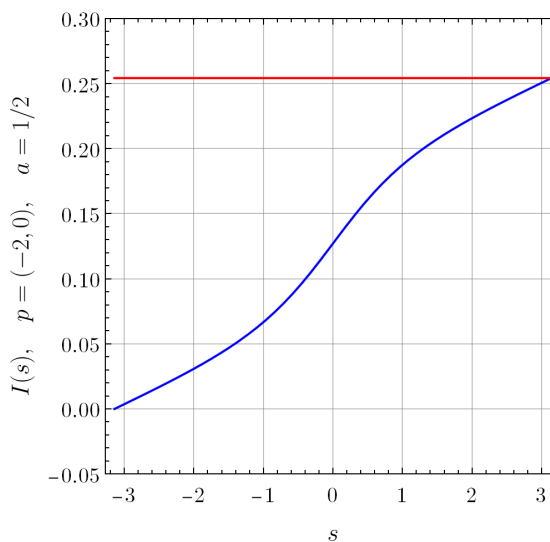
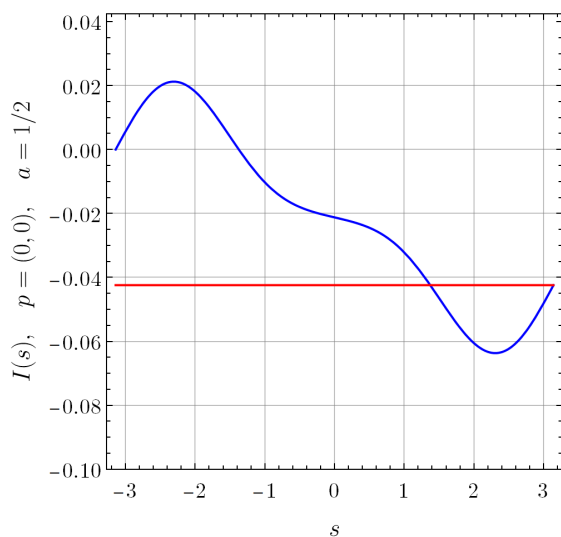
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{D_p(a)} u ds. \quad (850)$$

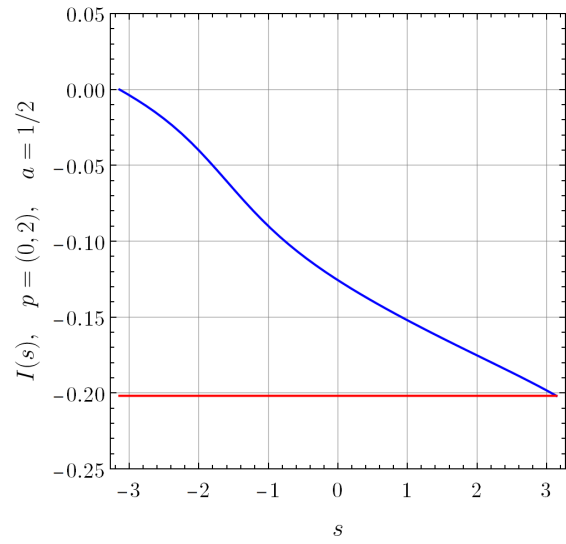
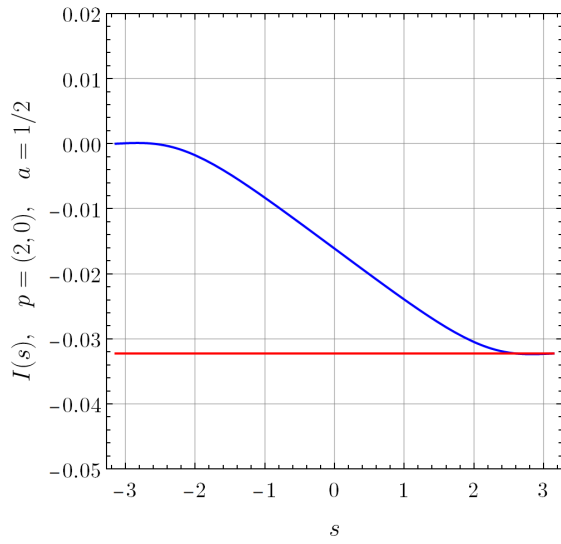
Sin importar como prefiera verlo, el hecho es el mismo: el valor de una función armónica en un punto es igual al promedio de los valores que toma sobre un círculo centrado en dicho punto (siempre que el círculo se encuentre dentro del dominio de armonicidad). Esta propiedad puede incluso generalizarse para n dimensiones, y a pesar de que los cálculos se vuelven un poco engorrosos, el argumento es en extremo similar.

Esta propiedad de las funciones armónicas no es solo un resultado bonito; es una característica intrínseca de ellas, a tal punto que la afirmación en sentido contrario es también verdadera: las funciones integrables que satisfacen la propiedad del promedio son, de hecho, armónicas. Sin embargo, este resultado puede que aún le parezca esotérico o de mentira. Para despejar dudas, a continuación se muestran gráficas de la siguiente función

$$I(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^s u(x_0 + a \cos(\theta), y_0 + a \sin(\theta)) d\theta \quad (851)$$

en comparación al valor real de $u(x_0, y_0)$, con u definida según (820) en su forma cartesiana, para distintos valores de $p = (x_0, y_0)$. $I(s)$ se muestra en azul, mientras que el valor de referencia se muestra en rojo.





Como puede observar, $I(\pi)$ coincide con el valor de referencia en el centro del camino circular, tal y como lo indica la propiedad del promedio.

Transformada de Fourier

T.1.A

Para demostrar la propiedad, vayamos por casos sobre c . Considere

$$\mathfrak{F}(f(ct))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t} dt \quad (852)$$

y suponga que $c > 0$. Tomando $u = ct$, la integral se torna

$$\frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u/c} du. \quad (853)$$

Así, obtenemos que

$$\mathfrak{F}(f(ct))(\omega) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u/c} du = \frac{1}{c} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\omega}{c}\right). \quad (854)$$

De forma similar, para el caso $c < 0$ tomaremos también un cambio $u = ct$. Sin embargo, dado que $c < 0$, entonces los límites de integración se ven invertidos, pues

$$u \rightarrow -\infty \quad \text{para} \quad t \rightarrow \infty \quad (855)$$

y vice versa. De esta manera

$$\mathfrak{F}(f(ct))(\omega) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{-i\omega u/c} du = -\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u/c} du. \quad (856)$$

Por tanto, si $c < 0$ entonces la igualdad resultante es similar, pero con el signo invertido.

$$\mathfrak{F}(f(ct))(\omega) = -\frac{1}{c} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\omega}{c}\right). \quad (857)$$

Juntando ambos casos en uno,

$$\mathfrak{F}(f(ct))(\omega) = \frac{1}{|c|} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (858)$$

que es precisamente lo que se buscaba demostrar.

T.1.B

Procedamos empleando la definición de la transformada de Fourier:

$$\mathfrak{F}(f(t \pm t_0))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0)e^{-i\omega t} dt. \quad (859)$$

Tomando el cambio $u = t \pm t_0$, la integral puede reescribirse como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u \mp t_0)} du = e^{\pm i\omega t_0} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du. \quad (860)$$

Finalmente,

$$\mathfrak{F}(f(t \pm t_0))(\omega) = e^{\pm i\omega t_0} \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (861)$$

T.1.C

De forma similar al procedimiento anterior, usando la definición podemos observar que

$$\mathfrak{F}(e^{\pm i\omega_0 t} f(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega_0 t} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (862)$$

Sin embargo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega_0 t} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega \mp \omega_0)t} dt \quad (863)$$

y por tanto

$$\mathfrak{F}(e^{\pm i\omega_0 t} f(t))(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega \mp \omega_0). \quad (864)$$

T.1.D

Usando la definición de la transformada de Fourier,

$$\mathfrak{F}(Df)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Df(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (865)$$

Aplicando integración por partes sobre Df , la integral puede reescribirse según

$$\int_{-\infty}^{\infty} Df(t) e^{-i\omega t} dt = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (866)$$

Pero como f satisface

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0 \quad (867)$$

entonces

$$f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (868)$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Df(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (869)$$

y así

$$\mathfrak{F}(Df)(\omega) = i\omega \cdot \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (870)$$

T.1.E

Partiendo otra vez desde la definición, tenemos

$$\mathfrak{F}(tf(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (871)$$

Note que

$$tf(t) e^{-i\omega t} = f(t) \cdot i\partial_{\omega} (e^{-i\omega t}). \quad (872)$$

Sustituyendo en la integral, la expresión resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot i\partial_{\omega} (e^{-i\omega t}) dt = iD \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (873)$$

según la regla integral de Leibniz. Finalmente,

$$\mathfrak{F}(tf(t))(\omega) = iD \cdot \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (874)$$

T.2

La expresión general puede ser encontrada empleando directamente (874) de manera sucesiva. Así,

$$\mathfrak{F}(t^k f(t))(\omega) = iD \cdot \mathfrak{F}(t^{k-1} f(t))(\omega). \quad (875)$$

Aplicando la propiedad k veces, obtenemos entonces

$$\mathfrak{F}(t^k f(t))(\omega) = i^k D^k \cdot \mathfrak{F}(f)(\omega) \quad (876)$$

S.1

La transformada de f_ϵ puede encontrarse empleando la definición como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = \frac{\sin(\omega\epsilon)}{\pi\omega}. \quad (877)$$

Así, la transformada de f_ϵ , que no es más que un pulso rectangular unitario de longitud 2ϵ centrado en 0, es dada por

$$\mathfrak{F}(f_\epsilon)(\omega) = \frac{\epsilon}{\pi} \text{sinc}(\omega\epsilon). \quad (878)$$

S.2

Para obtener la transformada de g existen dos maneras de proceder. La primera es reemplazar a g directamente en la definición de la transformada de Fourier e integrar a fuerza bruta. La segunda, más popular entre las personas que no aprecian el sufrimiento innecesario, es emplear las propiedades de la transformada de Fourier para expresar a $\mathfrak{F}(g)$ en términos de transformadas ya conocidas con anterioridad. En efecto, note que

$$g(x) = -f_{1/2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + f_{1/2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (879)$$

donde f_ϵ es definida según **S.1**. De esta manera, podemos obtener a $\mathfrak{F}(g)$ casi de inmediato recordando (878) y usando la propiedad (861):

$$\mathfrak{F}(g)(\omega) = -e^{i\omega/2} \mathfrak{F}(f_{1/2})(\omega) + e^{-i\omega/2} \mathfrak{F}(f_{1/2})(\omega) \quad (880)$$

$$= -2i \mathfrak{F}(f_{1/2})(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (881)$$

$$= -\frac{i}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (882)$$

S.3.A

Dado que h es integrable (¿por qué?), para determinar a $\mathfrak{F}(h)$ solo es necesario encontrar la transformada de Fourier de $e^{-|x|}$ y luego utilizar las propiedades de la transformada. Es decir, como $h \in L^1$,

$$\mathfrak{F}(h)(\omega) = -D^2 \mathfrak{F}(e^{-|x|})(\omega). \quad (883)$$

Tomemos entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx. \quad (884)$$

Esta integral puede separarse en dos partes según la fórmula de De Moivre como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(\omega x) dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \sin(\omega x) dx. \quad (885)$$

Vayamos por partes: primero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(\omega x) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(\omega x) dx = \frac{2}{1 + \omega^2}. \quad (886)$$

Por otra parte, podemos asegurar que

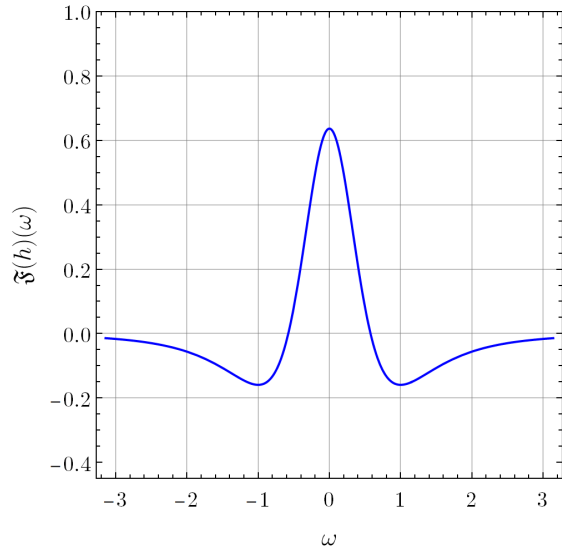
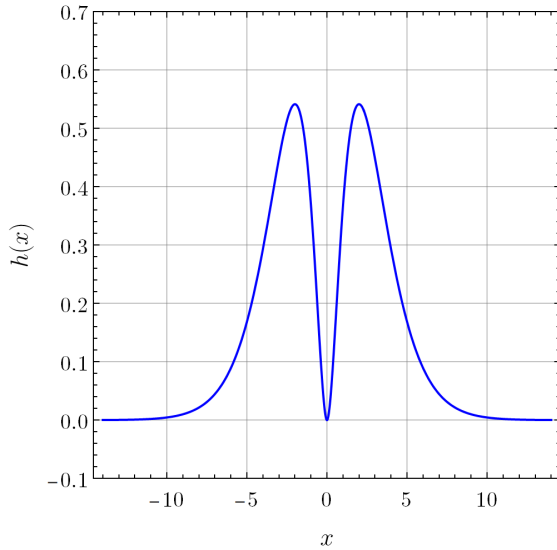
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \sin(\omega x) dx = 0 \quad (887)$$

pues $\sin(\omega x)$ es una función impar para todo ω real, con la excepción de $\omega = 0$ donde la integral se anula de forma trivial. Así, obtenemos que

$$\mathfrak{F}(e^{-|x|})(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2}. \quad (888)$$

Luego, la transformada deseada puede obtenerse derivando sucesivamente según (883) como

$$\mathfrak{F}(h)(\omega) = -\frac{1}{\pi} D^2 \left(\frac{1}{1 + \omega^2} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - 3\omega^2}{(1 + \omega^2)^3}. \quad (889)$$



S.3.B

Tome

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2} dx. \quad (890)$$

Para calcular la integral, procederemos usando integración de contorno sobre un camino semicircular, como es costumbre. Entonces, considere

$$\psi(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} = \frac{e^{-i\omega \operatorname{Re}(z)} \cdot e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{1+z^2}. \quad (891)$$

Note que

$$|\psi(z)| = \frac{e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|1+z^2|}. \quad (892)$$

Por tanto, si $\omega > 0$ entonces $|\psi(z)| \rightarrow \infty$ a medida que $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$. Esto implica que al momento de plantear el camino semicircular para la integración de contorno este no puede abrirse sobre el semiplano $\operatorname{Im}(z) > 0$, pues entonces $|\psi(z)|$ no decrece con la rapidez requerida por la desigualdad ML (de hecho, $|\psi(z)| \rightarrow \infty$). Para $\omega < 0$ se presenta una situación similar, pero en sentido contrario sobre el semiplano $\operatorname{Im}(z) < 0$. Como consecuencia, es necesario ir por ambos casos por separado, $\omega > 0$ y $\omega < 0$, para la integración de contornos. Suponga entonces que $\omega > 0$ y que el camino de integración es un semicírculo cerrado sobre el semiplano $\operatorname{Im}(z) < 0$, como es usual. Así, y según la teoría de integración de contorno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}(\psi; -i) = -2\pi i \cdot \frac{i}{2} e^{-\omega} = \pi e^{-\omega}, \quad \omega > 0. \quad (893)$$

No pierda de vista el signo ($-$) frente a la expresión del teorema del Residuo, debido a la orientación del camino semicircular con respecto a la integración original sobre la recta real. De forma similar, para $\omega < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}(\psi; i) = 2\pi i \cdot -\frac{i}{2} e^{\omega} = \pi e^{\omega}. \quad (894)$$

Combinando ambos resultados, obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}, \quad \omega \neq 0. \quad (895)$$

Finalmente, para $\omega = 0$, vemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}, \quad (896)$$

que es precisamente

$$\frac{1}{2} e^{-|\omega|}. \quad (897)$$

Por tanto,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}. \quad (898)$$

S.4

Aunque la expresión para f_t se vea intimidante, para calcular $\mathfrak{F}(f_t)$ solo es necesario recordar la definición de la transformada de Fourier y no perder de vista cuál es la variable con respecto a la cual se está transformando. Considere

$$\mathfrak{F}(f_t)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \frac{1+\cos(x-t)}{1+t} e^{-i\omega x} dx \quad (899)$$

Sacando las constantes en términos de t de la integral, podemos evaluar directamente pues

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} (1 + \cos(x-t)) e^{-i\omega x} dx = \int_{t-\pi}^{t+\pi} e^{-i\omega x} dx + \int_{t-\pi}^{t+\pi} \cos(x-t) e^{-i\omega x} dx \quad (900)$$

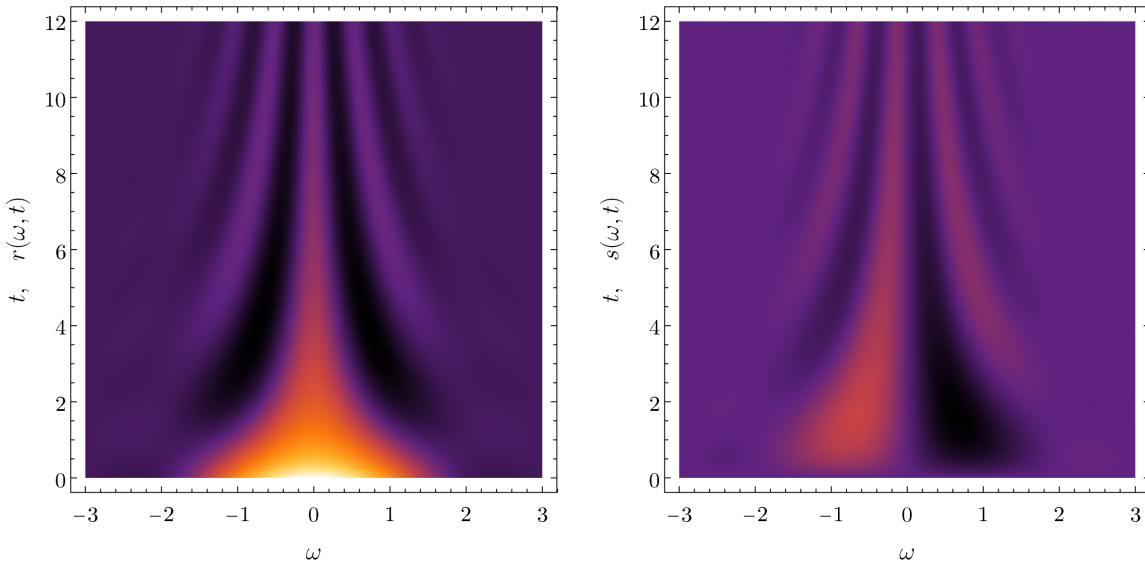
$$= 2\pi e^{-i\omega t} \cdot \text{sinc}(\pi\omega) - 2e^{-i\omega t} \cdot \frac{\omega \sin(\pi\omega)}{\omega^2 - 1} \quad (901)$$

$$= 2\pi e^{-i\omega t} \left[\text{sinc}(\pi\omega) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\omega \sin(\pi\omega)}{\omega^2 - 1} \right]. \quad (902)$$

Reemplazando de vuelta en la definición, obtenemos

$$\mathfrak{F}(f_t)(\omega) = \frac{e^{-i\omega t}}{1+t} \left[\text{sinc}(\pi\omega) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\omega \sin(\pi\omega)}{\omega^2 - 1} \right]. \quad (903)$$

Sean $r(\omega, t) = \text{Re}(\hat{f}_t(\omega))$ y $s(\omega, t) = \text{Im}(\hat{f}_t(\omega))$. A continuación se muestran dos *espectrogramas* (gráficas de intensidad en el espacio de frecuencia como función del tiempo) para r y s respectivamente.



Esta clase de gráficas, ampliamente utilizadas por distintas ramas de la ingeniería, son de especial utilidad al analizar señales acústicas o eléctricas. Aunque en el mundo real casi nunca se ven tan suaves o bien definidas, son una herramienta esencial en el análisis de frecuencia.

S.5.A

La propiedad que este ejercicio pretende mostrar, mejor conocida en la literatura como el teorema de convolución, es una de las propiedades fundamentales de la transformada de Fourier. Considere

$$\mathfrak{F}(f * g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s) ds \right) e^{-i\omega x} dx. \quad (904)$$

Dado que $f, g \in L^1$, entonces $f * g \in L^1$. Por tanto, el teorema de Fubini nos permite juntar ambas integrales según

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)e^{-i\omega x} ds dx \quad (905)$$

y, además, cambiar el orden de integración.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-s) e^{-i\omega x} dx \right) ds. \quad (906)$$

Tomando el cambio de variables $u = x - s$, la primera integral se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} e^{-i\omega s} du = e^{-i\omega s} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du = e^{-i\omega s} \cdot 2\pi \mathfrak{F}(g)(\omega). \quad (907)$$

Sustituyendo en (906) e integrando respecto a s obtenemos

$$\mathfrak{F}(g)(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds = 2\pi \mathfrak{F}(g)(\omega) \cdot \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (908)$$

Y así, finalmente

$$\mathfrak{F}(f * g) = 2\pi \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g). \quad (909)$$

S.5.B

No solo de la manera anterior se relacionan la transformada de Fourier de dos funciones y su convolución, sino que también es posible aplicar el argumento en sentido contrario, partiendo ahora desde una convolución en el dominio de frecuencias y obteniendo la transformada de un producto de funciones sobre el dominio original. En efecto, sean \hat{f} y \hat{g} las transformadas de Fourier de f y g , respectivamente, y considere

$$(\hat{f} * \hat{g})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \hat{g}(\omega - s) ds. \quad (910)$$

Note que

$$\hat{g}(\omega - s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{ist} e^{-i\omega t} dt. \quad (911)$$

Sustituyendo en (910) y empleando nuevamente el teorema de Fubini,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ist} ds \right) e^{-i\omega t} dt. \quad (912)$$

Pero como

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ist} ds, \quad (913)$$

entonces la expresión se torna

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (914)$$

Finalmente, obtenemos la relación deseada:

$$2\pi \mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) = \mathfrak{F}(f \cdot g) \quad (915)$$

S.6

Para obtener la transformada deseada basta con aplicar sucesivamente, y con cuidado, las propiedades que hemos demostrado en ejercicios anteriores. Primero, vea que

$$\mathfrak{F}(\sin(x)f(2x+1))(\omega) = \frac{1}{2i} \mathfrak{F}((e^{ix} - e^{-ix})f(2x+1))(\omega) \quad (916)$$

$$= \frac{1}{2i} [\mathfrak{F}(f(2x+1))(\omega-1) - \mathfrak{F}(f(2x+1))(\omega+1)]. \quad (917)$$

Ahora, en este punto seguramente se estará sintiendo tentado a escribir

$$\mathfrak{F}(f(2x+1))(\omega-1) = e^{i\omega} \mathfrak{F}(f(2x))(\omega-1). \quad (918)$$

Sin embargo, esto **no es** una operación válida. Visite nuevamente el procedimiento de **T.1.B**; observe como la propiedad recae esencialmente sobre un cambio de variable lineal en la definición de la transformada de Fourier. No obstante, en este caso el cambio de variable $2u = 2x - 1$ implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(2x-1)e^{-i(\omega-1)x} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(2u)e^{-i(\omega-1)(2u-1)/2} du = \int_{-\infty}^{\infty} f(2u)e^{-i(\omega-1)u} e^{i(\omega-1)/2} du \quad (919)$$

Pero

$$e^{i(\omega-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(2u)e^{-i(\omega-1)u} du \neq e^{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(2u)e^{-i(\omega-1)u} du \quad (920)$$

que es lo que pretendíamos afirmar, quizá ingenuamente, en (918). Claramente las expresiones no son iguales. La pregunta es entonces cómo reescribir el argumento de f de tal manera que la propiedad de **T.1.B** sea válida. Para lograr esto, basta con escribir al argumento de la forma $k \cdot (x \pm x_0)$ y aplicar la transformación solo sobre $x \pm x_0$, o bien aplicar la propiedad de escalado sobre k y luego la propiedad del desplazamiento como es usual. Al final, si aún tiene dudas de cómo aplicar las propiedades o en qué orden, puede recurrir a la definición integral y tomar los cambios de variables necesarios. Siguiendo con el procedimiento que acabamos de describir, vea que

$$\mathfrak{F}(f(2x+1))(\omega-1) = \mathfrak{F}(f(2(x+1/2))) (\omega-1) \quad (921)$$

$$= e^{i(\omega-1)/2} \mathfrak{F}(f(2x))(\omega-1) \quad (922)$$

$$= \frac{e^{i(\omega-1)/2}}{2} \mathfrak{F}(f(x))\left(\frac{\omega-1}{2}\right). \quad (923)$$

De forma similar,

$$\mathfrak{F}(f(2x+1))(\omega+1) = e^{i(\omega+1)/2} \mathfrak{F}(f(2x))(\omega+1) \quad (924)$$

$$= \frac{e^{i(\omega+1)/2}}{2} \mathfrak{F}(f(x))\left(\frac{\omega+1}{2}\right). \quad (925)$$

Finalmente, juntando ambos resultados

$$\mathfrak{F}(\sin(x)f(2x+1))(\omega) = \frac{e^{i(\omega-1)/2}}{4i} \hat{f}\left(\frac{\omega-1}{2}\right) - \frac{e^{i(\omega+1)/2}}{4i} \hat{f}\left(\frac{\omega+1}{2}\right). \quad (926)$$

S.7

La transformada de Fourier de f puede calcularse sin mucho problema empleando las propiedades que hemos demostrado hasta ahora. Por conveniencia, utilizaremos el resultado de (888) para ahorrar ciertos cálculos. Primero, observe que

$$\mathfrak{F}(e^{-|x|} \cos(x))(\omega) = \frac{1}{2} [\mathfrak{F}(e^{ix} e^{-|x|})(\omega) + \mathfrak{F}(e^{-ix} e^{-|x|})(\omega)] \quad (927)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathfrak{F}(e^{-|x|})(\omega - 1) + \mathfrak{F}(e^{-|x|})(\omega + 1)]. \quad (928)$$

Luego, como

$$\mathfrak{F}(e^{-|x|})(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad (929)$$

entonces

$$\mathfrak{F}(e^{-|x|} \cos(x))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1 + (\omega - 1)^2} + \frac{1}{1 + (\omega + 1)^2} \right]. \quad (930)$$

Simplificando y juntando las expresiones, obtenemos la transformada deseada:

$$\mathfrak{F}(e^{-|x|} \cos(x))(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2 + \omega^2}{4 + \omega^4}. \quad (931)$$

S.8

Nuevamente, para encontrar la transformada de Fourier en cuestión, no es necesario recurrir directamente a la definición sino emplear las propiedades. Primero, y recordando (878), note que

$$f(x) = x \cdot f_{1/2} \left(x - \frac{1}{2} \right). \quad (932)$$

De esta manera, aplicando las propiedades de la transformada de Fourier obtenemos

$$\mathfrak{F}(f)(\omega) = iD \cdot [e^{-i\omega/2} \mathfrak{F}(f_{1/2})(\omega)] = iD \cdot \left[\frac{e^{-i\omega/2}}{2\pi} \text{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]. \quad (933)$$

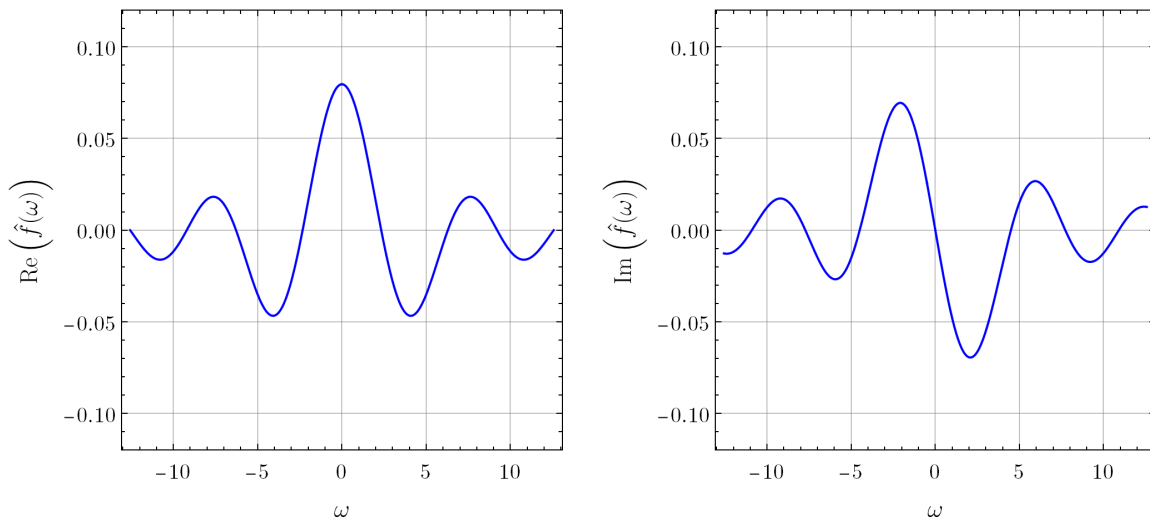
Derivando ambos términos y simplificando, la expresión entre corchetes se torna

$$\frac{e^{-i\omega/2}}{2\pi} \left(\frac{\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin(\omega/2)}{\omega^2} - \frac{i}{2} \text{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right). \quad (934)$$

Finalmente,

$$\mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{e^{-i\omega/2}}{4\pi} \left[\text{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) + 2i \left(\frac{\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin(\omega/2)}{\omega^2} \right) \right]. \quad (935)$$

A continuación se muestran gráficas para la parte real e imaginaria de \hat{f} .



S.9

A estas alturas del curso, es muy posible que el concepto de un espacio de Schwartz le parezca algo sin mayor importancia o, simplemente, algo que no merece su tiempo. Sin embargo, es aquí donde debo llamar su atención a lo siguiente para discutir la motivación del espacio de Schwartz y tratar de disipar la niebla de sus formalismos y tecnicismos.

Hasta este punto, solo hemos considerado las transformadas de Fourier para funciones integrables, pues a eso nos acota la definición misma. Sin embargo, muchas otras funciones como los polinomios, los logaritmos e incluso las funciones trigonométricas, no poseen una transformada definida en este sentido pues no son integrables sobre \mathbb{R} ; es decir, no son elementos de L^1 . Más adelante, cuando pretendamos extender la noción de transformada de Fourier en un sentido distribucional, naturalmente necesitaremos un espacio de funciones sobre el cual operar que garantice que las cantidades (en este caso integrales, algunas *ficticias*) se encuentren bien definidas para estos casos. Este es precisamente el rol del espacio de Schwartz, que no es más que un espacio de funciones con un decrecimiento tan fuerte que, en esencia, garantiza la integrabilidad de casi cualquier expresión al multiplicarla por una función tal. Si la definición en los textos le resulta confusa, puede pensar en $S(\mathbb{R})$ de la siguiente manera: el espacio de Schwartz es el espacio de todas las funciones suaves cuyas derivadas (*todas* las derivadas, incluyendo la función misma) decrecen más rápido que cualquier función de la forma

$$\frac{1}{x^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (936)$$

Dos consecuencias inmediatas y de gran interés son: 1. el producto de cualquier polinomio con una función f del espacio de Schwartz es, nuevamente, una función del espacio de Schwartz y 2. la transformada de Fourier de una función del espacio de Schwartz es también una función del espacio de Schwartz. Luego veremos estos dos hechos en acción, así que no los pierda de vista. Por ahora concentrémonos en los cálculos para este ejercicio. Considere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x) dx. \quad (937)$$

Como

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)e^{-ix\mu} d\mu, \quad (938)$$

entonces sustituyendo en la expresión, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)e^{-ix\mu} d\mu \right) dx. \quad (939)$$

Como $f, g \in S(\mathbb{R})$, entonces $f \cdot g \in S(\mathbb{R})$ y por tanto el producto $f(x)g(x)e^{-ix\mu}$ es absolutamente integrable. De esta manera, el teorema de Fubini nos permite cambiar el orden de integración según

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\mu} dx \right) d\mu. \quad (940)$$

Pero esto es justamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\hat{g}(\mu) d\mu. \quad (941)$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\hat{g}(\mu) d\mu, \quad (942)$$

que es lo que se pretendía demostrar. Vale la pena recordar, por miedo a generar confusión en el lector, que la variable de integración siempre es *muda*; es decir,

$$\int f(x) dx, \quad \int f(y) dy, \quad \int f(\theta) d\theta \quad (943)$$

son todas integrales equivalentes. La relación (942) es precisamente lo que usaremos más adelante para extender el concepto de transformada de Fourier a funciones que no normalmente cumplirían los requisitos para tener una, tal y como hicimos en la primera parte para extender el concepto de derivada a funciones que no son derivables en el sentido clásico.

S.10.A

La demostración de este ejercicio sigue un patrón similar a la de **S.9**. De ahora en adelante, la convergencia de las integrales queda garantizada por las convenientes propiedades de las funciones pertenecientes al espacio de Schwartz y su fuerte decrecimiento. Así, tome

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{f(x)} dx. \quad (944)$$

Sin embargo, como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega, \quad (945)$$

entonces, y usando las propiedades de la conjugación, la expresión anterior resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega \right)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \overline{e^{i\omega x}} d\omega \right) dx \quad (946)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot e^{-i\omega x} d\omega \right) dx. \quad (947)$$

Como $f, \hat{f} \in S(\mathbb{R})$ entonces el producto $f(x)\overline{\hat{f}(\omega)}$ es absolutamente integrable y, por tanto, el teorema de Fubini asegura que podemos cambiar el orden de integración como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \right) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \hat{f}(\omega) dx \quad (948)$$

Finalmente, obtenemos el resultado deseado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (949)$$

S.10.B

Esta segunda relación puede obtenerse siguiendo exactamente el mismo argumento. En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)} e^{-i\omega x} d\omega \right) dx \quad (950)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) d\omega \quad (951)$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \quad (952)$$

S.11.A

Inmediatamente después de conocer la definición distribucional de la transformada de Fourier, que establece que la transformada de una distribución atemperada $f \in S^*(\mathbb{R})$ es precisamente la distribución que transforma según

$$\langle \hat{f} | g \rangle = \langle f | \hat{g} \rangle \quad (953)$$

para $g \in S(\mathbb{R})$, podemos observar la directa correspondencia con los cálculos de **S.9**. En esencia, (942) es la motivación principal tras esta nueva noción de la transformada de Fourier: si la transformada de una cierta función puede calcularse mediante la definición convencional, no hay problema. Pero si la función no satisface los requerimientos de la definición original, entonces podemos tomar a (942) como punto de partida y afirmar que si *tuviere* una transformada, entonces satisfaría (942). La definición de la transformada distribucional no es más que una formalización de esta nueva perspectiva, pero es en extremo poderosa. Casi todas las funciones que encontramos a diario en la ingeniería y demás ciencias naturales, a pesar de no siempre ser absolutamente integrables, inducen distribuciones atemperadas a las cuales ahora podemos asignar una transformada de Fourier con sentido matemático e incluso físico.

No obstante, y a pesar de ser verdaderas transformadas de Fourier con todo el rigor de la palabra, no debemos asumir *a priori* que todas las propiedades anteriormente demostradas son válidas aún en el nuevo esquema distribucional. Ni tontos ni perezosos, a continuación demostraremos cada una de ellas nuevamente.

Así, sea $g \in S(\mathbb{R})$ y considere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(e^{\pm i\omega_0 t} K(t))(\mu) g(\mu) d\mu. \quad (954)$$

Empleando la definición de la transformada de una distribución atemperada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega_0 \mu} K(\mu) \hat{g}(\mu) d\mu. \quad (955)$$

Pero como

$$K(\mu) \cdot e^{\pm i\omega_0 \mu} \hat{g}(\mu) = K(\mu) \cdot \mathfrak{F}(g(\omega \pm \omega_0))(\mu). \quad (956)$$

según las propiedades de la transformada de Fourier convencional, entonces usando la definición nuevamente obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\mu) \cdot \mathfrak{F}(g(\omega \pm \omega_0))(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\omega) g(\omega \pm \omega_0) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\omega \mp \omega_0) g(\omega) d\omega. \quad (957)$$

Si los pasos anteriores le confunden, solo no pierda de vista que la *única* variable que no es muda aquí es ω_0 . Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(e^{\pm i\omega_0 t} K(t))(\omega) g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\omega \mp \omega_0) g(\omega) d\omega, \quad (958)$$

tal y como sucede para el caso convencional.

S.11.B

Siguiendo un patrón similar al anterior, podemos partir de la definición según

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(K(t \pm t_0))(\omega)g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega \pm t_0)\hat{g}(\omega) d\omega. \quad (959)$$

De aquí, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\hat{g}(\omega \mp t_0) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\mathfrak{F}(e^{\pm it_0\mu}g(\mu))(\omega) d\omega \quad (960)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\omega)e^{\pm i\omega t_0}g(\omega) d\omega. \quad (961)$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(K(t \pm t_0))(\omega)g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t_0}\hat{K}(\omega)g(\omega) d\omega. \quad (962)$$

S.11.C

Comenzando por la definición, tome

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(DK)(\mu)g(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} DK(\mu)\hat{g}(\mu) d\mu. \quad (963)$$

Aplicando las propiedades de la derivada generalizada, vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} DK(\mu)\hat{g}(\mu) d\mu = - \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu)D\hat{g}(\mu) d\mu = i \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu)\mathfrak{F}(\omega g(\omega))(\mu) d\mu. \quad (964)$$

Finalmente, aplicando la definición nuevamente obtenemos

$$i \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu)\mathfrak{F}(\omega g(\omega))(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \cdot \hat{K}(\omega)g(\omega) d\mu. \quad (965)$$

Para la siguiente propiedad, el procedimiento es casi idéntico.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(\mu K(\mu))(\omega)g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega K(\omega)\hat{g}(\omega) d\omega \quad (966)$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\mathfrak{F}(Dg)(\omega) d\omega \quad (967)$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\omega)Dg(\omega) d\omega \quad (968)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} iD \cdot \hat{K}(\omega)g(\omega) d\omega. \quad (969)$$

S.12

Para encontrar la transformada de Fourier (en el sentido distribucional) de la delta de Dirac basta con considerar

$$\langle \hat{\delta} | g \rangle, \quad g \in S(\mathbb{R}). \quad (970)$$

Aplicando la definición,

$$\langle \delta | \hat{g} \rangle = \hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt. \quad (971)$$

Pero esta expresión justamente equivale a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \left\langle \frac{1}{2\pi} | g \right\rangle, \quad (972)$$

de manera que

$$\langle \hat{\delta} | g \rangle = \left\langle \frac{1}{2\pi} | g \right\rangle. \quad (973)$$

Por tanto,

$$\mathfrak{F}(\delta) = \frac{1}{2\pi} \quad (974)$$

en el sentido distribucional de la transformada. Nunca pierda de vista que **no existe** tal cosa como el valor de la transformada $\hat{\delta}$ en un punto ω dado, $\hat{\delta}(\omega)$. Así como el resto de las distribuciones atemperadas, esta transformada solo tiene sentido en el contexto del producto $\langle | \rangle$.

De forma similar, la transformada de 1 como distribución atemperada también puede calcularse mediante

$$\langle \mathfrak{F}(1) | g \rangle = \langle 1 | \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) d\omega. \quad (975)$$

Sin embargo, note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) d\omega = g(0) = \langle \delta | g \rangle. \quad (976)$$

Entonces,

$$\langle 1 | \hat{g} \rangle = \langle \delta | g \rangle, \quad (977)$$

y finalmente

$$\mathfrak{F}(1) = \delta. \quad (978)$$

S.13

Bajo la definición clásica de la transformada de Fourier, las funciones seno y coseno simplemente no califican para poseer una transformada. Las integrales sencillamente no convergen. Ahora, sin embargo, podemos asignar transformadas a ambas funciones mediante la definición distribucional. Comencemos con la función seno. Sea

$$s_k(x) = \sin(kx) \quad (979)$$

y considere

$$\mathfrak{F}(s_k). \quad (980)$$

Dado que

$$\sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}, \quad (981)$$

entonces

$$\mathfrak{F}(s_k) = \frac{1}{2i} \mathfrak{F}(e^{ikx}) - \frac{1}{2i} \mathfrak{F}(e^{-ikx}). \quad (982)$$

Pero según (958) y (978), la expresión anterior no es más que

$$\frac{1}{2i}\delta_k - \frac{1}{2i}\delta_{-k}, \quad (983)$$

donde $\delta_k(x) = \delta(x - k)$ es la delta de Dirac centrada en k . Así,

$$\mathfrak{F}(s_k) = \frac{1}{2i}\delta_k - \frac{1}{2i}\delta_{-k}. \quad (984)$$

De forma similar, si $c_k(x) = \cos(kx)$ entonces

$$\mathfrak{F}(c_k) = \frac{1}{2}\mathfrak{F}(e^{ikx}) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}(e^{-ikx}) = \frac{1}{2}\delta_k + \frac{1}{2}\delta_{-k}. \quad (985)$$

S.14.A

A primera vista, puede que la afirmación del ejercicio le parezca extraña. Después de todo, ¿si es la misma transformada de Fourier por qué ha de satisfacer propiedades distintas? Realmente, esto no es más que una consecuencia de la convención particular empleada para la transformada de Fourier en el caso clásico. En este curso, la transformada es definida según

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (986)$$

pero existen muchas otras convenciones para la transformada, algunas tomando

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (987)$$

cada una con ventajas y desventajas según la aplicación específica. Al final, los cálculos siguen las mismas relaciones funcionales pero con constantes distintas; lo único que debemos hacer para trabajar con nuestra convención es efectuar las pruebas y determinar las constantes apropiadas. Así, considere

$$\mathfrak{F}(f * \psi), \quad f \in S(\mathbb{R}), \quad \psi \in S^*(\mathbb{R}). \quad (988)$$

Según la definición de la transformada para distribuciones atemperadas, si $g \in S(\mathbb{R})$ entonces

$$\langle \mathfrak{F}(f * \psi) | g \rangle = \langle f * \psi | \hat{g} \rangle. \quad (989)$$

Esta última expresión es equivalente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)f(\omega - s) ds \right) d\omega. \quad (990)$$

Ahora, suponga que f es la transformada de Fourier inversa de alguna función $\phi \in S(\mathbb{R})$; es decir

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu)e^{i\omega\mu} d\mu. \quad (991)$$

Entonces,

$$f(-(s - \omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu)e^{-i(s-\omega)\mu} d\mu = 2\pi\hat{\phi}(s - \omega), \quad (992)$$

de manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)f(\omega - s) ds \right) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\hat{\phi}(s - \omega) ds \right) d\omega. \quad (993)$$

Empleando el teorema de Fubini, podemos cambiar el orden de integración según

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(s-\omega) d\omega \right) ds, \quad (994)$$

y por tanto,

$$\langle f * \psi \mid \hat{g} \rangle = 2\pi \langle \psi \mid \hat{g} * \hat{\phi} \rangle. \quad (995)$$

Sin embargo, y en virtud de la propiedad para el caso **no distribucional** (915),

$$2\pi \langle \psi \mid \hat{g} * \hat{\phi} \rangle = \langle \psi \mid \mathfrak{F}(\phi \cdot g) \rangle. \quad (996)$$

Aplicando la definición una vez más,

$$\langle \psi \mid \mathfrak{F}(\phi \cdot g) \rangle = \langle \hat{\psi} \mid \phi \cdot g \rangle = \langle \phi \cdot \hat{\psi} \mid g \rangle. \quad (997)$$

Finalmente, como

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu) e^{i\omega\mu} d\mu \implies \hat{f} = \phi \quad (998)$$

obtenemos la igualdad deseada

$$\langle \mathfrak{F}(f * \psi) \mid g \rangle = \langle \hat{f} \cdot \hat{\psi} \mid g \rangle. \quad (999)$$

De forma que

$$\mathfrak{F}(f * \psi) = \hat{f} \cdot \hat{\psi} \quad (1000)$$

en el sentido distribucional.

S.14.B

De forma similar,

$$\langle \mathfrak{F}(f \cdot \psi) \mid g \rangle = \langle f \cdot \psi \mid \hat{g} \rangle = \langle \psi \mid f \cdot \hat{g} \rangle. \quad (1001)$$

Entonces, si $f = \hat{\gamma}$ para alguna función $\gamma \in S(\mathbb{R})$,

$$\langle \psi \mid f \cdot \hat{g} \rangle = \langle \psi \mid \hat{\gamma} \cdot \hat{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \psi \mid \mathfrak{F}(\gamma * g) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\psi} \mid \gamma * g \rangle \quad (1002)$$

puesto que $2\pi \hat{\gamma} \cdot \hat{g} = \mathfrak{F}(\gamma * g)$ para el caso clásico. Ahora,

$$\langle \hat{\psi} \mid \gamma * g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s) \gamma(\omega-s) ds \right) d\omega. \quad (1003)$$

Pero como

$$\gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{i\omega\mu} d\mu, \quad (1004)$$

entonces, y siguiendo un argumento similar al de (992),

$$\gamma(-(s-\omega)) = 2\pi \hat{f}(s-\omega). \quad (1005)$$

Por tanto, aplicando el teorema de Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s) \gamma(\omega-s) ds \right) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) \hat{f}(s-\omega) d\omega \right) ds. \quad (1006)$$

Así, finalmente

$$\langle \mathfrak{F}(f \cdot \psi) \mid g \rangle = \langle \hat{f} * \hat{\psi} \mid g \rangle. \quad (1007)$$

Por más insignificante que estos resultados le parezcan, dejan ver un hecho muy simple: Si intenta aplicar las propiedades de convolución usuales a un producto de funciones que involucra una transformada distribucional, obtendrá un resultado **incorrecto**. Tome el siguiente ejercicio como ejemplo.

S.14.C

Para encontrar la transformada de Fourier bajo las restricciones que impone el ejercicio basta con recurrir a (1007), pues de esta manera

$$\mathfrak{F}(\chi_{[a,b]}(x) \sin(x))(\omega) = \left(\mathfrak{F}(\chi_{[a,b]}) * \frac{1}{2i} \delta_1 - \frac{1}{2i} \delta_{-1} \right)(\omega) \quad (1008)$$

$$= \frac{1}{2i} [\mathfrak{F}(\chi_{[a,b]})(\omega - 1) - \mathfrak{F}(\chi_{[a,b]})(\omega + 1)]. \quad (1009)$$

Así, lo único que queda por determinar es

$$\mathfrak{F}(\chi_{[a,b]}). \quad (1010)$$

Tome un segundo para notar que es (1007) la propiedad que coincide con la transformada en el sentido clásico y **no** (915). Aplicar la propiedad de la convolución usual aquí sería un error, puesto que la transformada de la función seno solo tiene sentido en un contexto distribucional, y como advertimos en **S.14.B** estas satisfacen propiedades distintas. Ahora, ya hemos calculado una transformada muy similar en (878). Y como

$$\chi_{[a,b]}(x) = f_\epsilon(x - \sigma), \quad \text{para } \sigma = \frac{a+b}{2}, \quad \epsilon = \frac{b-a}{2}, \quad (1011)$$

entonces

$$\mathfrak{F}(\chi_{[a,b]})(\omega) = e^{-i\omega\sigma} \mathfrak{F}(f_\epsilon)(\omega) = e^{-i\omega\sigma} \cdot \frac{b-a}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{b-a}{2}\omega\right). \quad (1012)$$

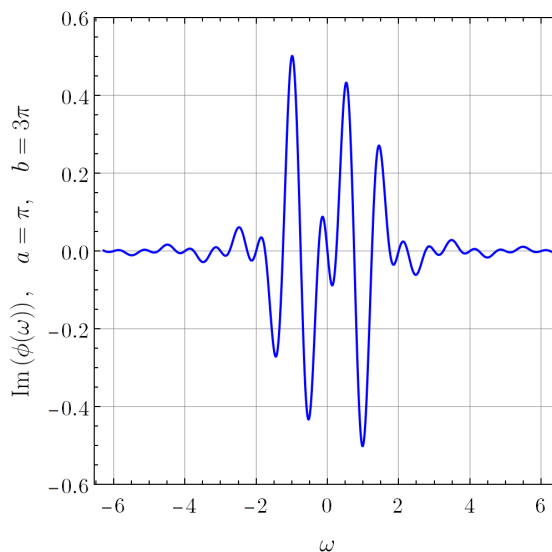
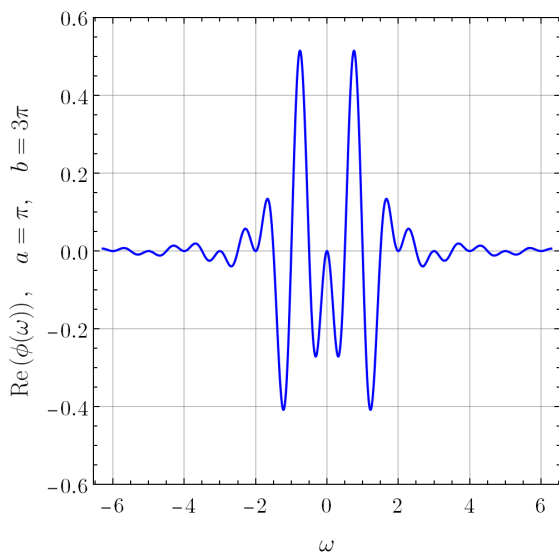
Sustituyendo en (1009) y simplificando, obtenemos

$$\frac{Le^{-i\omega\sigma}}{4\pi i} \left[e^{i\sigma} \text{sinc}\left(\frac{L}{2}(\omega - 1)\right) - e^{-i\sigma} \text{sinc}\left(\frac{L}{2}(\omega + 1)\right) \right], \quad (1013)$$

donde $L = b - a$ es la longitud del intervalo $[a, b]$. Finalmente,

$$\mathfrak{F}(\chi_{[a,b]}(x) \sin(x))(\omega) = \frac{Le^{-i\omega\sigma}}{4\pi i} \left[e^{i\sigma} \text{sinc}\left(\frac{L}{2}(\omega - 1)\right) - e^{-i\sigma} \text{sinc}\left(\frac{L}{2}(\omega + 1)\right) \right], \quad (1014)$$

A continuación se muestran gráficas de la parte real e imaginaria de $\phi(\omega) = \mathfrak{F}(\chi_{[a,b]}(x) \sin(x))(\omega)$ para $a = \pi$, $b = 3\pi$.



S.15

Para encontrar la transformada basta con observar que

$$\mathfrak{F}(\sin(kx))(\omega) = \mathfrak{F}\left(x \cdot \frac{\sin(kx)}{x}\right)(\omega) = iD \cdot \mathfrak{F}\left(\frac{\sin(kx)}{x}\right)(\omega). \quad (1015)$$

Así, sea

$$\hat{g}_k(\omega) = \mathfrak{F}\left(\frac{\sin(kx)}{x}\right)(\omega). \quad (1016)$$

Entonces, según (1015) y en virtud de (983) \hat{g}_k satisface

$$D\hat{g}_k = \frac{1}{2}\delta_{-k} - \frac{1}{2}\delta_k \quad (1017)$$

y de aquí que

$$\hat{g}_k(\omega) = (H * D\hat{g}_k)(\omega) = \frac{1}{2}(H(\omega + k) - H(\omega - k)) \quad (1018)$$

pues

$$H * D\hat{g}_k = \delta * \hat{g}_k = \hat{g}_k. \quad (1019)$$

Note como pudimos esquivar la necesidad de evaluar si

$$\frac{\sin(kx)}{x} \quad (1020)$$

posee una transformada en el sentido convencional o no, recurriendo directamente a la transformada distribucional de la función seno. De ahora en más, esta estrategia nos será útil para encontrar la transformada de funciones cuya integrabilidad es dudosa. Note además una correspondencia interesante:

$$\hat{g}_k(\omega) = \frac{1}{2}(H(\omega + k) - H(\omega - k)) = \frac{1}{2}f_k(\omega), \quad (1021)$$

con f_k definida según **S.1**. Así, observe como la transformada de funciones sinc resulta en funciones escalón, y de forma inversa la transformada de funciones escalón resulta en funciones sinc.

S.16

La función de Heaviside, $H(x)$, claramente no puede tener una transformada de Fourier en el sentido clásico. A diferencia de su transformada de Laplace, donde la convergencia está garantizada para un cierto dominio del plano complejo, la integral correspondiente para la transformada de Fourier no converge. Sin embargo, tal y como hicimos para la transformada de las funciones seno, podemos asignar una transformada en el sentido distribucional. Note que

$$DH = \delta. \quad (1022)$$

Sin embargo, y a pesar de ser técnicamente correcta, esta afirmación no pinta una imagen completa de la situación. Si sumamos cualquier función constante a H , obtenemos nuevamente

$$D(H + c) = DH = \delta, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1023)$$

Así, aplicando las propiedades de la transformada distribucional a ambos miembros

$$i\omega \cdot (\hat{H}(\omega) + c\delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \quad (1024)$$

y luego

$$\hat{H}(\omega) = \frac{1}{2\pi i\omega} - c\delta(\omega). \quad (1025)$$

Aquí debemos detenernos para hacer dos comentarios. Primero, es importante mencionar que en la expresión anterior ω^{-1} se interpreta como distribución de una manera muy específica mediante su *valor principal de Cauchy*. Es decir, no se toma a esta distribución según

$$\langle \omega^{-1} | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega + \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^b \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega \quad (1026)$$

sino como

$$\langle \omega^{-1} | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega \right]. \quad (1027)$$

En el segundo caso, el límite hacia 0 por ambos lados se toma de forma simultánea, y esto permite asignar un valor concreto a integrales que no necesariamente convergen según la forma del primer caso cancelando poco a poco las contribuciones de la singularidad. Una consecuencia interesante de tomar el valor principal de Cauchy para la distribución ω^{-1} es que

$$\langle \omega^{-1} | g \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega \right] = \int_0^{\infty} \frac{g(\omega) - g(-\omega)}{\omega} d\omega. \quad (1028)$$

Lo segundo que debemos atender es la constante c en la expresión de \hat{H} . ¿Cuál debería ser su valor? Naturalmente no puede tener *cualquier* valor, pues entonces la función de Heaviside tendría **varias** transformadas de Fourier en vez de solo una. Esto simplemente no es posible. La transformada de Fourier es única, y por tanto c debe tener un valor específico. Para determinar este valor, basta con recurrir a la definición de la transformada de Fourier distribucional:

$$\langle \hat{H} | g \rangle = \langle H | \hat{g} \rangle, \quad g \in S(\mathbb{R}). \quad (1029)$$

De esta manera,

$$\left\langle \frac{1}{2\pi i\omega} - c\delta | g \right\rangle = \langle H | \hat{g} \rangle. \quad (1030)$$

La estrategia será entonces expandir cada lado para encontrar el valor de c que satisface la igualdad. Considere

$$\left\langle \frac{1}{2\pi i\omega} - c\delta | g \right\rangle = -c \langle \delta | g \rangle + \frac{1}{\pi} \left\langle \frac{1}{2i\omega} | g \right\rangle = -c \langle \delta | g \rangle + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(\omega) - g(-\omega)}{2i\omega} d\omega. \quad (1031)$$

Ahora, como

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mu) e^{i\omega\mu} d\mu, \quad (1032)$$

entonces, agrupando las exponenciales complejas,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(\omega) - g(-\omega)}{2i\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mu) \cdot \frac{\sin(\omega\mu)}{\omega} d\mu d\omega. \quad (1033)$$

Luego, empleando el teorema de Fubini (dado que $\hat{g} \in S(\mathbb{R})$) podemos cambiar el orden de integración según

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mu) \cdot \frac{\sin(\omega\mu)}{\omega} d\mu d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mu) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega\mu)}{\omega} d\omega d\mu. \quad (1034)$$

La integral en términos de ω es una integral notable, dada por

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega\mu)}{\omega} d\omega = \operatorname{sgn}(\mu) \frac{\pi}{2}, \quad (1035)$$

y por tanto, la expresión original se reduce a

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mu) \cdot \operatorname{sgn}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \hat{g}(\mu) d\mu - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \hat{g}(\mu) d\mu = \int_0^{\infty} \frac{\hat{g}(\mu) - \hat{g}(-\mu)}{2} d\mu. \quad (1036)$$

Volviendo a (1031), obtenemos entonces que

$$\left\langle \frac{1}{2\pi i\omega} - c\delta | g \right\rangle = -c \langle \delta | g \rangle + \int_0^{\infty} \frac{\hat{g}(\mu) - \hat{g}(-\mu)}{2} d\mu. \quad (1037)$$

Por otro lado,

$$\langle H | \hat{g} \rangle = \int_0^\infty \hat{g}(\mu) d\mu. \quad (1038)$$

Observe lo siguiente: así como una función real f puede separarse en su parte *par* e *impar* mediante

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad f_{\text{impar}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad (1039)$$

\hat{g} , que es una función de reales a complejos, también puede separarse su parte *simétrica* y *antisimétrica*:

$$\hat{g}_{\text{sim}}(\mu) = \frac{\hat{g}(\mu) + \hat{g}(-\mu)}{2} \quad \hat{g}_{\text{anti}}(\mu) = \frac{\hat{g}(\mu) - \hat{g}(-\mu)}{2}. \quad (1040)$$

En esencia, estas funciones conservan las mismas propiedades que para el caso real, de forma que $\hat{g}_{\text{sim}}(\mu) = \hat{g}_{\text{sim}}(-\mu)$ y $\hat{g}_{\text{anti}}(\mu) = -\hat{g}_{\text{anti}}(-\mu)$. Entonces, descomponiendo a \hat{g} usando estas funciones,

$$\langle H | \hat{g} \rangle = \int_0^\infty \hat{g}_{\text{sim}}(\mu) d\mu + \int_0^\infty \hat{g}_{\text{anti}}(\mu) d\mu \quad (1041)$$

$$= \int_0^\infty \hat{g}_{\text{sim}}(\mu) d\mu + \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\mu) - \hat{g}(-\mu)}{2} d\mu. \quad (1042)$$

Pero como $\hat{g}_{\text{sim}}(\mu) = \hat{g}_{\text{sim}}(-\mu)$, tenemos

$$\int_0^\infty \hat{g}_{\text{sim}}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \hat{g}_{\text{sim}}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} g(0) = \frac{1}{2} \langle \delta | g \rangle. \quad (1043)$$

Y reemplazando de vuelta en (1038),

$$\langle H | \hat{g} \rangle = \frac{1}{2} \langle \delta | g \rangle + \int_0^\infty \frac{\hat{g}(\mu) - \hat{g}(-\mu)}{2} d\mu. \quad (1044)$$

Finalmente, comparando (1044) con (1037) vemos que

$$c = -\frac{1}{2} \quad (1045)$$

y por tanto

$$\hat{H}(\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} + \frac{1}{2} \delta(\omega). \quad (1046)$$

Aunque el procedimiento le parezca complicado, en esencia el camino es bastante claro: como la transformada de Fourier de H debe satisfacer la definición, entonces ambos lados deben valer lo mismo. Esta igualdad termina determinando a c , y el resto de los cálculos no son para más que poder expresar ambos miembros en términos de cantidades semejantes. Si la presencia de la delta de Dirac le sigue pareciendo extraña, puede pensarlo intuitivamente de la siguiente forma: ω^{-1} , como distribución, es una solución a la ecuación distribucional

$$\omega \cdot f = 1. \quad (1047)$$

Sin embargo, no es la **única** distribución que resuelve dicha ecuación, pues $\omega \cdot \delta(\omega) = 0$, y entonces

$$\omega \cdot (f + c\delta) = \omega \cdot f = 1, \quad (1048)$$

de manera que $f + c\delta$ también es una solución para cualquier c . En ese sentido, la transformada distribucional de H no puede ser **solo** en términos de ω^{-1} porque esta no es la única distribución inversa a ω .

S.17

A primera vista, la integral parece indicar claramente de qué va el cálculo, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at) \sin(b(u-t))}{t(u-t)} dt = ab \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(at) \text{sinc}(b(u-t)) dt = ab (\phi_a * \phi_b)(u), \quad (1049)$$

donde

$$\phi_a(\omega) = \text{sinc}(a\omega). \quad (1050)$$

Esta forma, en términos de una convolución, inmediatamente sugiere emplear alguna de las propiedades de la convolución para transformadas de Fourier con la intención de simplificar el cálculo. Pero, ¿cual debería utilizar? Note como (915) implícitamente asume que f y \hat{f} son pares de Fourier en el sentido clásico, y a pesar de que ϕ_a puede calcularse como la transformada de una función bajo la definición convencional, no posee una antitransformada clásica. Por ende, la propiedad de convolución que debemos invocar en este caso es (1007) y no (915). Luego, según (878)

$$\frac{\pi}{a} \cdot \mathfrak{F}(f_a)(\omega) = \text{sinc}(a\omega) = \phi_a(\omega). \quad (1051)$$

Así, la integral original equivale a

$$ab (\phi_a * \phi_b)(u) = \pi^2 (\hat{f}_a * \hat{f}_b)(u). \quad (1052)$$

A su vez, esta convolución de transformadas puede ser escrita en términos de la transformada de un producto de funciones mediante (1007) como

$$\pi^2 (\hat{f}_a * \hat{f}_b)(u) = \pi^2 \mathfrak{F}(f_a \cdot f_b)(u). \quad (1053)$$

Ahora, supongamos que $a \leq b$. Entonces,

$$f_a \cdot f_b = f_a, \quad (1054)$$

pues esto no es más que el producto de pulsos unitarios centrados en el origen, y por tanto

$$\pi^2 \mathfrak{F}(f_a \cdot f_b)(u) = \pi^2 \mathfrak{F}(f_a)(u) = a\pi \cdot \text{sinc}(au). \quad (1055)$$

Finalmente, obtenemos un resultado muy interesante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at) \sin(b(u-t))}{t(u-t)} dt = ab (\phi_a * \phi_b)(u) = k\pi \cdot \text{sinc}(ku), \quad k = \min(\{a, b\}). \quad (1056)$$

Mas allá del valor de la convolución, que es el resultado deseado, lo que esto implica es que la convolución entre dos funciones sinc es, curiosamente, una función sinc.

S.18

Como indicamos en el enunciado, a pesar de que ψ no es integrable (ni siquiera *localmente* integrable), a través de su valor principal de Cauchy podemos dar una noción distribucional a ψ y encontrar su transformada de Fourier asociada. Entonces, aplicando la definición,

$$\langle \hat{\psi} | g \rangle = \langle \psi | \hat{g} \rangle, \quad g \in S(\mathbb{R}). \quad (1057)$$

Así, y recordando la acción de ψ como distribución (en términos de su valor principal de Cauchy), vemos que el miembro derecho de la igualdad es equivalente a

$$\int_0^{\infty} \frac{\hat{g}(\omega) - \hat{g}(-\omega)}{\omega} d\omega. \quad (1058)$$

Luego, como

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (1059)$$

la integral original puede reescribirse según

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) (e^{-i\omega x} - e^{i\omega x}) dx d\omega = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x) dx d\omega. \quad (1060)$$

Empleando el teorema de Fubini, podemos cambiar el orden de integración y reescribir la expresión como

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega x)}{\omega} d\omega dx. \quad (1061)$$

Así, y en virtud de que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega x)}{\omega} d\omega = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (1062)$$

obtenemos

$$\langle \psi | \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(x) dx = \langle \hat{\psi} | g \rangle. \quad (1063)$$

Finalmente, la transformada de ψ es dada por

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(\omega). \quad (1064)$$

S.19

A pesar de que f parece decrecer lo suficientemente rápido como para tener una transformada en el sentido clásico, seguramente tenga bastante claro que evaluar

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + 6x + 13} dx \quad (1065)$$

directamente es una complicación innecesaria. A estas alturas, tenemos suficientes propiedades y teoremas para reservar las definiciones solo a las funciones más problemáticas. Entonces, dejando a un lado el camino del dolor, podemos notar que

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 13} = \frac{1}{(x+3)^2 + 2^2} = \frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 1}. \quad (1066)$$

Y entonces, tomando la transformada obtenemos

$$\mathfrak{F} \left(\frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 1} \right) (\omega) = e^{3i\omega} \mathfrak{F} \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \right) (\omega) = \frac{e^{3i\omega}}{2} \mathfrak{F} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) (2\omega) = \frac{e^{3i\omega}}{4} e^{-2|\omega|}. \quad (1067)$$

en virtud de (898). Aquí podríamos dar por terminado el ejercicio. Sin embargo, esta transformada en particular nos sirve para ejemplificar una situación que seguramente le resultará tentadora: aplicar las propiedades de traslación en tiempo o frecuencia con números complejos. Note como f también puede descomponerse según

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 13} = \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{x - r_+} - \frac{1}{x - r_-} \right), \quad r_{\pm} = -3 \pm 2i. \quad (1068)$$

Así,

$$\mathfrak{F} \left(\frac{1}{x^2 + 6x + 13} \right) (\omega) = \frac{1}{4i} \left[\mathfrak{F} \left(\frac{1}{x - r_+} \right) (\omega) - \mathfrak{F} \left(\frac{1}{x - r_-} \right) (\omega) \right]. \quad (1069)$$

Si los r_{\pm} fuesen números reales podríamos utilizar (962) junto a (1064) para determinar la transformada de inmediato. Sin embargo, como $r_{\pm} \in \mathbb{C}$, las transformadas en cuestión requieren un análisis más detallado; no es posible simplemente aplicar las propiedades que hemos deducido para números reales con números complejos. Si no cree que esto pueda ser así, inténtelo y vea como la transformada resultante es incorrecta. Ahora, considere

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{x-\sigma}\right)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x-\sigma} dx, \quad \sigma \in \mathbb{C} \quad (1070)$$

donde $\sigma = a + ib$. Si tomamos el cambio $s = i(x - \sigma) = b + i(x - a)$, entonces la integral se torna

$$\frac{1}{2\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{-\omega(s+i\sigma)}}{\mu} ds = ie^{-i\omega\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{-\omega s}}{s} ds. \quad (1071)$$

Pero esta es precisamente la transformada de Laplace inversa de s^{-1} evaluada en $-\omega$. Y como

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0, \quad (1072)$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x-\sigma} dx = ie^{-i\omega\sigma} H(-\omega). \quad (1073)$$

siempre que $b = \text{Im}(\sigma) > 0$. El caso $\text{Im}(\sigma) < 0$ puede calcularse siguiendo el mismo procedimiento mediante el cambio $s = -i(x - \sigma)$, obteniendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x-\sigma} dx = -ie^{-i\omega\sigma} H(\omega), \quad \text{Im}(\sigma) < 0. \quad (1074)$$

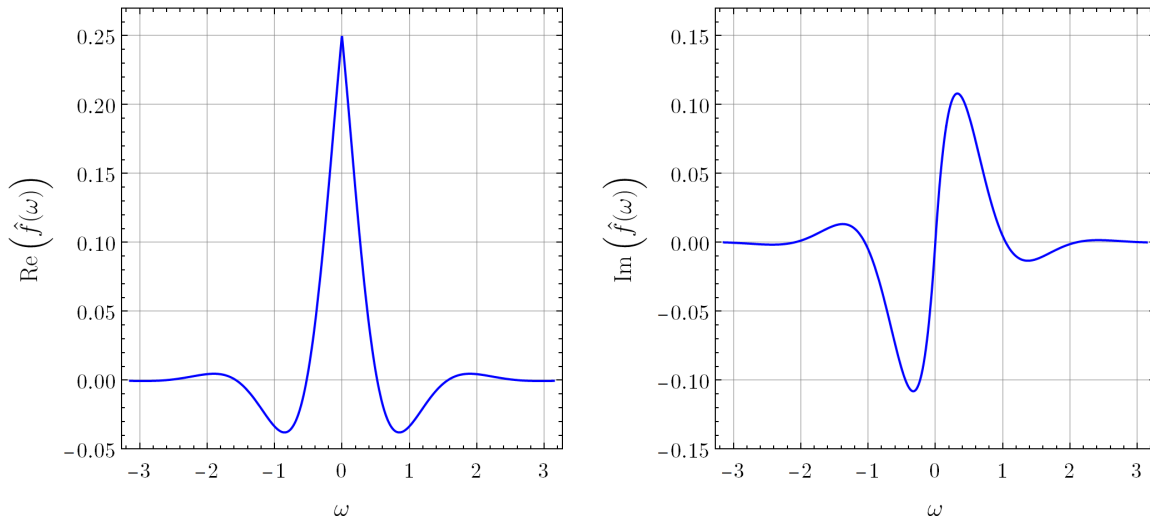
Juntando ambos resultados y volviendo a (1069),

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{x^2 + 6x + 13}\right)(\omega) = \frac{1}{4i} [ie^{-i\omega r_+} H(-\omega) + ie^{-i\omega r_-} H(\omega)]. \quad (1075)$$

Finalmente, simplificando y agrupando

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{x^2 + 6x + 13}\right)(\omega) = \frac{e^{3i\omega}}{4} e^{-2|\omega|}. \quad (1076)$$

Como puede observar, **no aplicar** las propiedades de traslación (ya sea temporal o en frecuencia) cuando las constantes en cuestión son complejas resulta en una transformada correcta, que coincide con el cálculo anterior mediante (898). A continuación se muestran gráficas para la parte real e imaginaria de \hat{f} .



S.20

Para efectuar la integral deseada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t) dt, \quad (1077)$$

observe que ésta puede escribirse en términos de su transformada de Fourier, pues

$$iD \cdot \mathfrak{F}(f)(\omega) = \mathfrak{F}(tf(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1078)$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t) dt = 2\pi i \cdot D\hat{f}(0). \quad (1079)$$

Evaluando directamente según (143),

$$2\pi i \cdot D\hat{f}(0) = 2\pi i \cdot \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1 - 3\omega^4}{(1 + \omega^4)^2} = 2\pi i. \quad (1080)$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t) dt = 2\pi i. \quad (1081)$$

De forma similar, como

$$Df(t) = D \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot \partial_t e^{i\omega t} d\omega = i \int_{-\infty}^{\infty} \omega \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (1082)$$

entonces

$$Df(0) = i \int_{-\infty}^{\infty} \omega \hat{f}(\omega) d\omega = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1 + \omega^4} d\omega. \quad (1083)$$

Esta expresión puede ser evaluada fácilmente empleando integración de contorno con un camino semicircular estándar sobre el semiplano complejo $\text{Im}(z) \geq 0$, pues

$$\left| \frac{z^2}{1 + z^4} \right| \leq \frac{|z|^2}{|1 - |z|^4|} \quad (1084)$$

y por tanto la desigualdad ML garantiza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{1 + z^4} dz = 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(\alpha) > 0} \text{Res}(\phi; \alpha), \quad \phi(z) = \frac{z^2}{1 + z^4}. \quad (1085)$$

Procediendo con la integración de contorno, vea que ϕ solo tiene dos singularidades en el semiplano $\text{Im}(z) > 0$.

En particular,

$$z = e^{i\pi/4}, \quad \text{y} \quad z = e^{i3\pi/4}. \quad (1086)$$

Usando el método que mejor le convenga puede verificar que

$$\text{Res}(\phi; e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4e^{i\pi/4}}, \quad \text{y} \quad \text{Res}(\phi; e^{i3\pi/4}) = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}}. \quad (1087)$$

De esta manera

$$2\pi i \cdot [\text{Res}(\phi; e^{i\pi/4}) + \text{Res}(\phi; e^{i3\pi/4})] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad (1088)$$

En resumen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1 + \omega^4} d\omega = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad (1089)$$

y finalmente

$$Df(0) = \frac{i\pi}{\sqrt{2}}. \quad (1090)$$

S.21

Para encontrar la transformada en cuestión, solo observe que

$$D\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = -2f(x). \quad (1091)$$

Así, el resto es carpintería pues

$$-\frac{1}{2}D\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = f(x), \quad (1092)$$

y por tanto

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{i\omega}{2}\mathfrak{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(\omega) = -\frac{i\omega}{4}e^{-|\omega|} \quad (1093)$$

en virtud de (898).

S.22

Lo primero que puede notar del ejercicio es que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * Df)(t)|^2 dt \quad (1094)$$

no puede ser evaluada directamente por un motivo muy sencillo: no conocemos aún a f y tampoco a Df . Sin embargo, usando las propiedades de la transformada de Fourier podemos deducirlo convirtiendo esta integral sobre el dominio temporal a una integral en el dominio de frecuencias. Tome

$$\psi(t) = (f * Df)(t). \quad (1095)$$

De esta manera,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * Df)(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt. \quad (1096)$$

Ahora, note que según (909)

$$\hat{\psi}(\omega) = 2\pi\hat{f}(\omega) \cdot i\omega\hat{f}(\omega) \quad (1097)$$

dado que ninguna de las transformadas es distribucional. No es difícil mostrar que

$$\hat{\psi}(\omega) = 2\pi i \cdot \frac{\omega}{(|\omega|^3+1)^2} \quad (1098)$$

es una función cuadrado integrable. Por tanto, el teorema de Plancherel nos asegura que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1099)$$

Reemplazando en la integral, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * Df)(t)|^2 dt = 8\pi^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\omega|^2}{(|\omega|^3+1)^4} d\omega. \quad (1100)$$

Sin embargo, como el integrando es simétrico podemos reescribir la integral según

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\omega|^2}{(|\omega|^3+1)^4} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^3+1)^4} d\omega. \quad (1101)$$

Luego, tomando el cambio $s = 1 + \omega^3$ podemos evaluar la integral directamente mediante

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^3+1)^4} d\omega = \frac{2}{3} \int_1^{\infty} \frac{1}{s^4} ds = \frac{2}{9}. \quad (1102)$$

Finalmente, obtenemos el resultado deseado

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * Df)(t)|^2 dt = \frac{16\pi^3}{9}. \quad (1103)$$

S.23

A partir de la ecuación diferencial que satisface f podemos extraer información sobre su transformada de Fourier \hat{f} , pues si

$$c^2 Df + xf = 0, \quad (1104)$$

entonces

$$i\omega c^2 \hat{f} + iD\hat{f} = 0; \quad (1105)$$

es decir,

$$c^{-2} D\hat{f} + \omega \hat{f} = 0. \quad (1106)$$

Observe como esta es, en esencia, exactamente la misma ecuación diferencial que satisface f . Por consiguiente, \hat{f} debe tener la misma forma de f :

$$\hat{f}(\omega) = k \cdot \exp\left(-\frac{c^2 \omega^2}{2}\right), \quad k \in \mathbb{C}. \quad (1107)$$

Así, lo único que queda por determinar para dar con la transformada de f es el valor de la constante k , también llamada constante de normalización. Esta puede ser calculada recordando que $f(0) = 1$ implica

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) d\omega = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 \omega^2 / 2} d\omega = 1 \quad (1108)$$

y por tanto

$$k = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 \omega^2 / 2} d\omega \right)^{-1} \quad (1109)$$

La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 \omega^2 / 2} d\omega \quad (1110)$$

es muy popular en física e ingeniería y su valor es ampliamente conocido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 \omega^2 / 2} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{|c|}. \quad (1111)$$

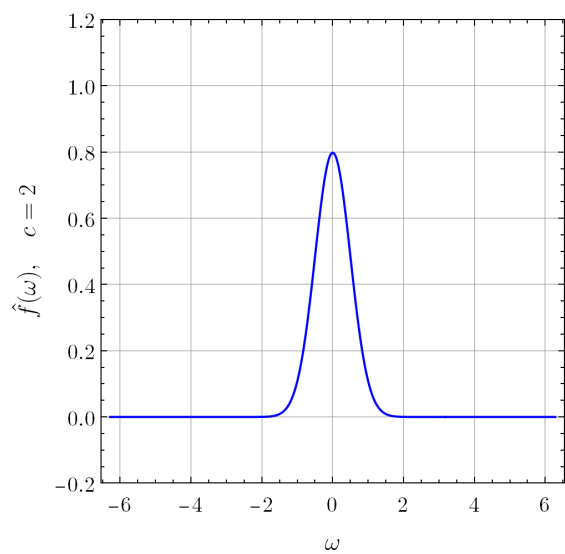
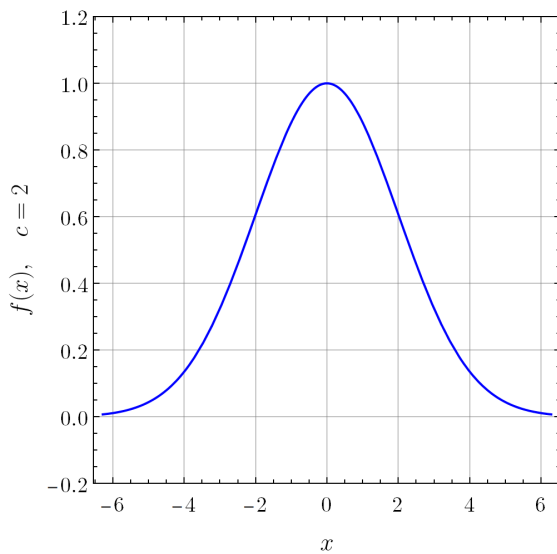
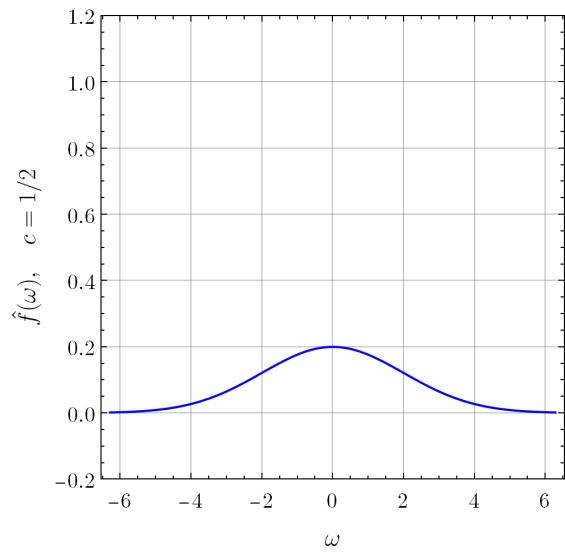
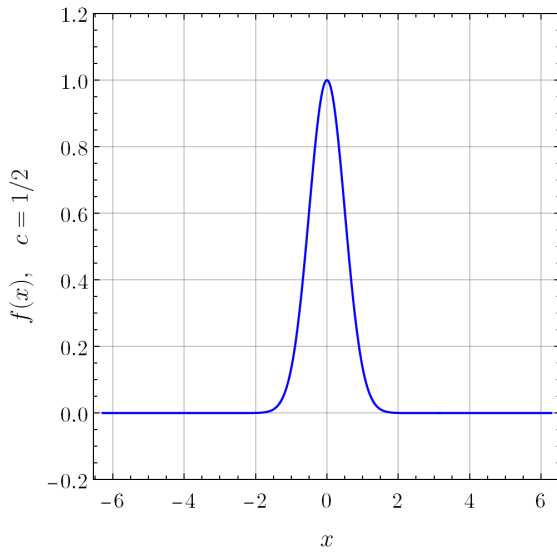
De esta forma, la constante de normalización k es dada por

$$k = \frac{|c|}{\sqrt{2\pi}} \quad (1112)$$

y finalmente

$$\hat{f}(\omega) = \frac{|c|}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2 \omega^2 / 2}. \quad (1113)$$

A continuación se muestran gráficas de f y \hat{f} para distintos valores de c . Observe la manera interesante en que se relacionan f y su transformada.



Note como a medida que f se vuelve más dilatada su transformada, por el contrario, se vuelve más angosta. Esto no es una coincidencia. Más bien, es un indicio de un resultado muy importante conocido como el *principio de incertidumbre*. Más adelante, en los ejercicios especiales, exploraremos una prueba de tal principio que, contra toda intuición, resulta no ser un principio sino una consecuencia natural de la transformada de Fourier.

S.24

A un estudiante en piloto automático evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx \quad (1114)$$

seguramente le resultará difícil. No porque no sea capaz de citar el teorema de Plancherel para luego afirmar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega, \quad (1115)$$

con

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (1116)$$

sino porque este procedimiento **es incorrecto**. Verá, el teorema de Plancherel requiere que las funciones que conforman el integrando decrezcan lo suficientemente rápido a medida que $|x| \rightarrow \infty$. Las funciones cuadrado integrables o las funciones del espacio de Schwartz no tienen problema en ajustarse a esto, pero la función

$$\frac{\sin(x)}{x} \quad (1117)$$

ni siquiera es integrable. Así, no es posible aplicar el teorema de Plancherel a este caso particular sin más. No obstante, esto no quiere decir que no podamos usar la transformada de Fourier para simplificar en gran medida los cálculos.

En ejercicios anteriores ya habíamos discutido la interesante relación entre los pulsos rectangulares y las funciones sinc: los primeros tienen transformadas de Fourier en términos de funciones sinc, y de forma conversas las funciones sinc tienen por transformada de Fourier pulsos rectangulares. Entonces, no debería ser sorpresa para usted que

$$\pi \hat{f}_1(x) = \text{sinc}(x), \quad (1118)$$

donde f_1 es definida según (878). Así, podemos reescribir la integral como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi \hat{f}_1(x) g(x) dx = \langle \pi \hat{f}_1 | g \rangle, \quad (1119)$$

que no es más que la acción de $\pi \hat{f}_1$ sobre g pensada como distribución. En este contexto, basta con seguir el argumento de la definición de la transformada de Fourier en el sentido distribucional para encontrar que

$$\langle \pi \hat{f}_1 | g \rangle = \langle \pi f_1 | \hat{g} \rangle = \pi \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{-|\omega|} d\omega, \quad (1120)$$

pues

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-|\omega|} \quad (1121)$$

según (898). Evaluando la integral directamente, vemos que

$$\pi \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{-|\omega|} d\omega = \pi \int_0^1 e^{-\omega} d\omega = \pi(1 - e^{-1}). \quad (1122)$$

Curiosamente, este valor es el mismo que habríamos obtenido aplicando el teorema de Plancherel a fuerza bruta. Aún así, esto no justifica su uso en situaciones donde las funciones no satisfacen los requerimientos de integrabilidad. Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx = \pi(1 - e^{-1}). \quad (1123)$$

D.1

Para encontrar las cantidades deseadas basta con utilizar propiedades de la transformada de Fourier y prestar un poco de atención. Vea que como

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (1124)$$

entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (1125)$$

puede evaluarse directamente como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2\pi \cdot \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \omega^2)}{\omega^2} = 2\pi. \quad (1126)$$

Para $f(1)$, la historia es un poco distinta. Naturalmente,

$$f(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + \omega^2)}{\omega^2} e^{i\omega} d\omega. \quad (1127)$$

Sin embargo, esta integral no es fácil de evaluar directamente. En vez de tratar de integrar a fuerza bruta, buscando desesperadamente cambios convenientes o empleando integración de contorno, usaremos un truco muy popular en física y matemática conocido como el *truco de Feynman*. Considere

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 \omega^2)}{\omega^2} e^{i\omega} d\omega, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1128)$$

Así, note como $I(1) = f(1)$ y $I(0) = 0$. Ahora, derivando con respecto a α obtenemos

$$DI(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_{\alpha} \ln(1 + \alpha^2 \omega^2)}{\omega^2} e^{i\omega} d\omega = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega}}{1 + \alpha^2 \omega^2} d\omega. \quad (1129)$$

Pero como

$$\mathfrak{F}(e^{-|t/\alpha|})(\omega) = \frac{|\alpha|}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2 \omega^2} \quad (1130)$$

en virtud de (888), entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega}}{1 + \alpha^2 \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{|\alpha|} \cdot e^{-1/|\alpha|} \quad (1131)$$

dado que la integral es precisamente su transformada de inversa de Fourier evaluada en $t = 1$. Juntando ambos resultados,

$$DI(\alpha) = \frac{2\pi\alpha}{|\alpha|} e^{-1/|\alpha|} = 2\pi \operatorname{sgn}(\alpha) e^{-1/|\alpha|}. \quad (1132)$$

A partir de esta derivada podemos construir a $I(\alpha)$ en términos de una integral definida para $\alpha \geq 0$, pues

$$I(\alpha) = 2\pi \int_0^{\alpha} \operatorname{sgn}(s) e^{-1/|s|} ds = 2\pi \int_0^{\alpha} e^{-1/s} ds \quad (1133)$$

satisface tanto (1132) como $I(0) = 0$. Por consiguiente, $f(1)$ puede determinarse tomando

$$f(1) = I(1) = 2\pi \int_0^1 e^{-1/s} ds. \quad (1134)$$

Puede que esta integral parezca inofensiva, pero la realidad es que no puede evaluarse en términos de funciones elementales. Tomando el cambio $u = s^{-1}$, la expresión se torna

$$f(1) = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du \quad (1135)$$

y empleando integración por partes obtenemos el resultado del enunciado:

$$f(1) = 2\pi \left(\frac{e^{-u}}{u} \Big|_{\infty}^1 - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right) = 2\pi \left(\frac{1}{e} - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right). \quad (1136)$$

Más específicamente, es

$$- \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (1137)$$

la integral que no puede ser evaluada en términos de funciones elementales. Aún así, este resultado es perfectamente válido. La cantidad

$$- \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (1138)$$

como función de x es una función especial conocida como la *integral exponencial*, $Ei(x)$, así que no se preocupe si le parece que sus cálculos están inconclusos. Por último, observe como el truco de Feynman nos permitió convertir una integral maligna en una simple aplicación de la transformada de Fourier y el teorema fundamental del cálculo. De ahora en más, sepa que parametrizar una integral de forma astuta bien puede ser la clave que necesita para dar con su valor.

D.2.A

Para encontrar la transformada de f , y a diferencia de ejercicios anteriores, no podemos emplear las propiedades de la transformada de Fourier. No conocemos la transformada de $\sinh(x)^{-1}$ y tampoco es posible descomponerla para plantear las funciones exponenciales como desplazamientos sobre el dominio de frecuencias, como hicimos con la función $\sin(x)$. Debemos efectuar la transformada mediante su definición, aprovechando que f decrece de manera exponencial y, por tanto, no dará problemas al momento de integrar. Así, considere

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} e^{-i\omega x} dx. \quad (1139)$$

Esta integral puede evaluarse sin necesidad de usar trucos o invocar magia; un procedimiento estándar de integración de contorno será suficiente. Entonces, tome

$$\psi(z) = \frac{ze^{-i\omega z}}{\sinh(\pi z)} = \frac{ze^{-i\omega \operatorname{Re}(z)} e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{\sinh(\pi z)}. \quad (1140)$$

Note como

$$|\psi(z)| = \frac{|z|e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|\sinh(\pi z)|} = \frac{2|z|e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|e^{\pi z} - e^{-\pi z}|} \leq \frac{2|z|e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|e^{\pi \operatorname{Re}(z)} - e^{-\pi \operatorname{Re}(z)}|}, \quad (1141)$$

en virtud de la desigualdad triangular inversa

$$|x - y| \geq ||x| - |y||. \quad (1142)$$

Ahora, suponga que $\omega < 0$. De esta manera, vemos que si escogemos un camino semicircular sobre $\operatorname{Im}(z) > 0$ para la integración de contorno,

$$\frac{2|z|e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|e^{\pi \operatorname{Re}(z)} - e^{-\pi \operatorname{Re}(z)}|} \quad (1143)$$

decrece con rapidez exponencial a medida que $|z| \rightarrow \infty$ y como consecuencia la desigualdad ML garantiza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im}(\alpha) > 0} \operatorname{Res}(\psi; \alpha). \quad (1144)$$

Si le preocupa la singularidad en nuestra estimación para $\operatorname{Re}(z) = 0$, vea que es solo un resultado de la acotación genérica. Volviendo a (1140) y reemplazando $z = iy$ puede verificar que una cota similar es válida siempre que $\sinh(i\pi y) \neq 0$. Continuando con el procedimiento, es sabido que la función $\sinh(z)$ posee ceros de primer orden para $z = in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, las singularidades de $\psi(z)$ (polos simples) ocurren en múltiplos enteros de i , excepto en $z = 0$ pues el numerador de la fracción también se anula y la singularidad es removible. Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}(\psi; in), \quad (1145)$$

pero como

$$\operatorname{Res}(\psi; in) = (-1)^n \frac{ine^{\omega n}}{\pi} \quad (1146)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} e^{-i\omega x} dx = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ne^{\omega n}. \quad (1147)$$

Esta suma infinita puede escribirse en términos de una suma geométrica, dado que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{\omega n} = \frac{1}{1 + e^{\omega}} \quad (1148)$$

y por consiguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{\omega n} = -\frac{e^{\omega}}{(1 + e^{\omega})^2} = -\frac{1}{4 \cosh^2(\omega/2)}, \quad \omega < 0. \quad (1149)$$

Reemplazando en la definición y simplificando las constantes,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{4\pi \cosh^2(\omega/2)}, \quad \omega < 0. \quad (1150)$$

Para $\omega > 0$ el análisis es idéntico, solo que la integración de contorno se realiza sobre el semiplano $\text{Im}(z) < 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} e^{-i\omega x} dx = -2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(\alpha) < 0} \text{Res}(\psi; \alpha) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-\omega n} \quad (1151)$$

y nuevamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{4\pi \cosh^2(\omega/2)}, \quad \omega > 0. \quad (1152)$$

Note que para $\omega = 0$ no podemos utilizar integración de contorno dado que $|\psi(z)|$ no tiende a cero sobre la recta $\text{Re}(z) = 0$ y por tanto nuestro argumento usual de la desigualdad ML no se sostiene. Sin embargo, aún podemos dar con el valor para $\omega = 0$ recordando que toda transformada de Fourier de una función integrable es continua, y así

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0). \quad (1153)$$

Como

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi \cosh^2(0)}, \quad (1154)$$

finalmente obtenemos a la transformada de Fourier de f para todo $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{4\pi \cosh^2(\omega/2)}. \quad (1155)$$

D.2.B

Para evaluar la integral, observe que

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(e^{\pi x} - e^{-\pi x})(x^2 + 1)} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx. \quad (1156)$$

Como ambas funciones son cuadrado integrables, entonces podemos utilizar el teorema de Plancherel y escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi \cosh^2(\omega/2)} \cdot \frac{1}{2} e^{-|\omega|} d\omega \quad (1157)$$

según (898) y (1155). Manipulando el integrando y simplificando,

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi \cosh^2(\omega/2)} \cdot \frac{1}{2} e^{-|\omega|} d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega}}{\cosh^2(\omega/2)} d\omega. \quad (1158)$$

Pero como

$$\frac{e^{-\omega}}{\cosh^2(\omega/2)} = \frac{4e^{-\omega}}{e^{-\omega}(1 + e^{\omega})^2} = \frac{4}{(1 + e^{\omega})^2}, \quad (1159)$$

la integral puede modificarse tomando el cambio $s = e^\omega d\omega$. Luego,

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega}}{\cosh^2(\omega/2)} d\omega = 2 \int_1^\infty \frac{1}{s(1+s)^2} ds = 2 \int_1^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{1+s} + \frac{s}{1+s} \right) ds. \quad (1160)$$

Evaluando directamente, obtenemos entonces que

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega}}{\cosh^2(\omega/2)} d\omega = 2 \ln(2) - 1 \quad (1161)$$

y finalmente, reemplazando en la integral original,

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(e^{\pi x} - e^{-\pi x})(x^2 + 1)} dx = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{4}. \quad (1162)$$

D.2.C

Usando un procedimiento muy similar al del ejercicio anterior es posible determinar a \hat{h}_μ empleando integración de contorno sobre un camino semicircular. De esta manera, tome

$$\hat{h}_\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh(\mu x)}{\sinh(x)} e^{-i\omega x} dx \quad (1163)$$

y considere

$$\phi(z) = \frac{\sinh(\mu z)}{\sinh(z)} e^{-i\omega z}. \quad (1164)$$

Siguiendo el patrón del ejercicio anterior, tome $\omega < 0$ y observe como

$$|\phi(z)| = \frac{|e^{\mu z} - e^{-\mu z}| e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|e^z - e^{-z}|} \leq \frac{|e^{\mu \operatorname{Re}(z)} + e^{-\mu \operatorname{Re}(z)}| e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|e^{\operatorname{Re}(z)} - e^{-\operatorname{Re}(z)}|} \leq \frac{|e^{\operatorname{Re}(z)} + e^{-\operatorname{Re}(z)}| e^{\omega \operatorname{Im}(z)}}{|e^{\operatorname{Re}(z)} - e^{-\operatorname{Re}(z)}|} \quad (1165)$$

pues $0 < \mu < 1$. De aquí que

$$|\phi(z)| \leq |\coth(\operatorname{Re}(z))| e^{\omega \operatorname{Im}(z)} \quad (1166)$$

y por tanto $|\phi(z)|$ decrece de manera exponencial a medida que $|z| \rightarrow 0$ para $\operatorname{Im}(z) > 0$ y la desigualdad ML garantiza que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh(\mu x)}{\sinh(x)} e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im}(\alpha) > 0} \operatorname{Res}(\phi; \alpha). \quad (1167)$$

El tratamiento de la singularidad $\operatorname{Re}(z) = 0$ en nuestra cota de ϕ puede tratarse de forma idéntica a como hicimos en **D.2.A** con ψ . Ahora, centremos nuestra atención al cálculo de los residuos de ϕ . Tal y como en el ejercicio anterior, vemos que ϕ tiene polos simples en $z = i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\sum_{\operatorname{Im}(\alpha) > 0} \operatorname{Res}(\phi; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}(\phi; i\pi n) \quad (1168)$$

y por consiguiente

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh(\mu x)}{\sinh(x)} e^{-i\omega x} dx = -2\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\mu\pi n) e^{\omega\pi n} = 2\pi \cdot \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-i\mu\pi n} e^{\omega\pi n} \right\} \quad (1169)$$

para $\omega < 0$. Comparando la última expresión con una suma geométrica, observe como

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-i\mu\pi n} e^{\omega\pi n} \right\} = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 + e^{-i\mu\pi} e^{\omega\pi}} - 1 \right). \quad (1170)$$

Pero dado que $\text{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$, entonces

$$\text{Im}\left(\frac{1}{1 + e^{-i\mu\pi}e^{\omega\pi}} - 1\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1 + e^{-i\mu\pi}e^{\omega\pi}} - \frac{1}{1 + e^{i\mu\pi}e^{\omega\pi}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\mu\pi)}{\cos(\mu\pi) + \cosh(\omega\pi)}. \quad (1171)$$

Sustituyendo de vuelta en la expresión original,

$$\hat{h}_\mu(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\mu\pi)}{\cos(\mu\pi) + \cosh(\omega\pi)}, \quad \omega < 0. \quad (1172)$$

Hasta ahora, nuestro procedimiento solo ha producido la transformada de Fourier para $\omega < 0$. En principio podríamos repetir el análisis para $\omega > 0$ y tomar un contorno apropiado, pero esto realmente no es necesario. Gracias a las propiedades de h_μ y las cualidades de la transformada de Fourier, es posible argumentar que esta fórmula debe ser válida también en $\omega \geq 0$ de la siguiente manera: como h_μ es par, entonces su transformada de Fourier solo tiene parte real y es par, pues

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_\mu(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_\mu(x) \cos(\omega x) dx. \quad (1173)$$

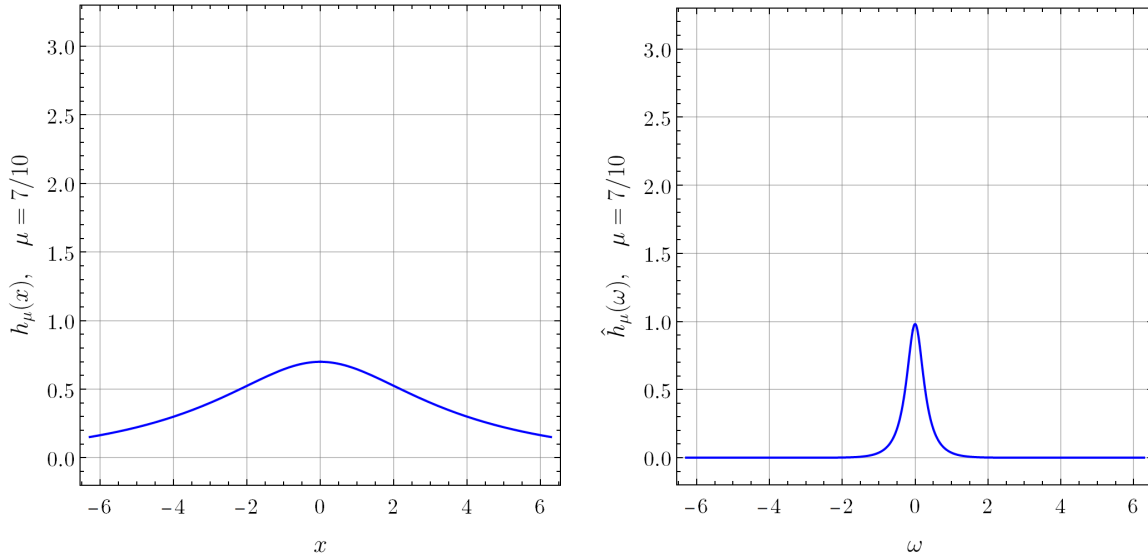
Así, $\hat{h}_\mu(-\omega) = \hat{h}_\mu(\omega)$ y por tanto (1172) es válida tanto para $\omega < 0$ y como para $\omega > 0$. El caso final, $\omega = 0$, puede ser cubierto notando que como h_μ es integrable entonces su transformada ha de ser continua, y por ende

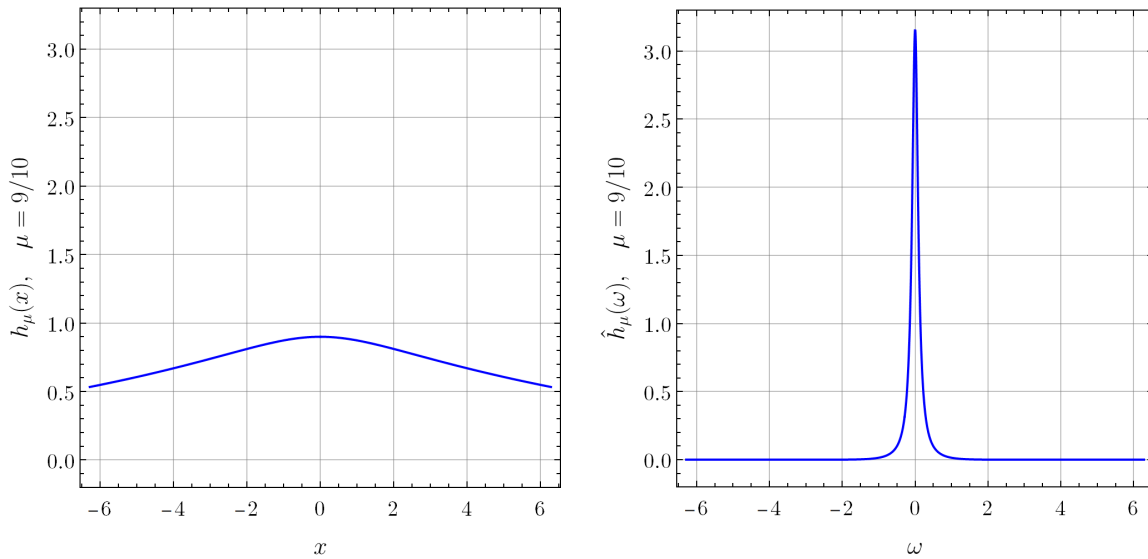
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{h}_\mu(\omega) = \hat{h}_\mu(0). \quad (1174)$$

Finalmente, podemos asegurar con firmeza que

$$\hat{h}_\mu(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\mu\pi)}{\cos(\mu\pi) + \cosh(\omega\pi)}. \quad (1175)$$

A continuación se muestran gráficas de h_μ y \hat{h}_μ para $\mu = 7/10$ y $\mu = 9/10$.





Antes de dar por terminado el ejercicio, note algo muy curioso. A medida que $\mu \rightarrow 1$, $h_\mu(x) \rightarrow 1$ y a su vez esto implica que $\hat{h}_\mu(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$. En efecto, las gráficas muestran precisamente este fenómeno; a medida que h_μ se acerca más y más a 1, su transformada se convierte en un pico cada vez más alto y angosto. Esta transformada de Fourier es un lindo recordatorio de cómo la delta de Dirac, a pesar de tener un carácter muy algebraico en el contexto distribucional, nace de un proceso límite sobre funciones convencionales.

D.3

Antes de comenzar, observe como

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} \sin^2(x)}{x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\alpha|x|}}{2} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx. \quad (1176)$$

En esta forma, la integral parece sugerir que el cálculo puede efectuarse empleando el teorema de Plancherel. Aunque es sabido que

$$\frac{\sin(x)}{x} \quad (1177)$$

no es una función integrable,

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} \quad (1178)$$

sí es integrable. De hecho, es cuadrado integrable, y por tanto podemos asegurar que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\alpha|x|}}{2} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty h(x) \overline{g(x)} dx \quad (1179)$$

en virtud de (952), donde

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-\alpha|\omega|}, \quad \hat{g}(\omega) = \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}. \quad (1180)$$

La estrategia entonces será encontrar a h y g tales que sus transformadas coincidan según la expresión anterior y evaluar la integral. Sin embargo, aún debemos atender un pequeño detalle. Si prestó atención al resolver **S.10.B**, seguramente se estará preguntando sobre la validez del teorema en este caso, donde las funciones no necesariamente pertenecen al espacio de Schwartz, sino que pertenecen a L^2 . La realidad del asunto es que el teorema es válido de forma más general para funciones cuadrado integrables que, además, sean absolutamente integrables (recuerde que esto es necesario para que posean transformadas de Fourier en el sentido clásico).

Las funciones en cuestión satisfacen las condiciones requeridas por el teorema, así que podremos llevar a cabo nuestro plan sin mayor preocupación. Primero, note que ya conocemos de antemano una función h tal que

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2}e^{-\alpha|\omega|}. \quad (1181)$$

En efecto, y según (898),

$$h(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}. \quad (1182)$$

Por otro lado, g puede determinarse recordando (878) y usando la propiedad (909). De esta manera,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}(\pi f_1 * \pi f_1)(x) = \frac{\pi}{2}(f_1 * f_1)(x). \quad (1183)$$

Preste especial atención a que es la instancia *clásica* de la propiedad de convolución, y no su versión distribucional dada en (1000), la que debe usarse. f_1 posee una transformada de Fourier en el sentido clásico y, por tanto, la propiedad que satisface es la correspondiente versión clásica. Si esto aún no le convence, visite nuevamente la demostración de la propiedad y confirme que solo es necesario que $f_1 \in L^1$. Así,

$$g(x) = \frac{\pi}{2}(f_1 * f_1)(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x+2), & -2 < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}(-x+2), & 0 < x \leq 2 \end{cases} \quad (1184)$$

Esto no es más que un pulso triangular de altura π centrado en $x = 0$. Juntando ambos resultados,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha|x|}}{2} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \cdot g(x) dx. \quad (1185)$$

Esta última expresión puede simplificarse un poco más observando que $g(x)$ es una función par y por ende

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \cdot g(x) dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^2 \frac{2-x}{\alpha^2 + x^2} dx = \int_0^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} dx - \frac{\alpha}{2} \int_0^2 \frac{x}{\alpha^2 + x^2} dx. \quad (1186)$$

Ambas integrales pueden evaluarse sin problemas usando resultados notables o sustituciones, obteniendo

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^2 \frac{2-x}{\alpha^2 + x^2} dx = \arctan\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{4} \ln\left(1 + \frac{4}{\alpha^2}\right). \quad (1187)$$

Finalmente,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin^2(x)}{x^2} dx = \arctan\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{4} \ln\left(1 + \frac{4}{\alpha^2}\right), \quad \alpha > 0. \quad (1188)$$

D.4.A

La transformada de Fourier de f puede hallarse recurriendo a una estrategia que hemos usado con anterioridad: en vez de tratar de hallar a \hat{f} directamente, determinaremos $\mathfrak{F}(Df)$ primero para luego emplear las propiedades de la transformada de Fourier. Así, note que

$$Df(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 2x \cdot g(x), \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (1189)$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos miembros,

$$i\omega \cdot \hat{f}(\omega) = 2i \cdot D\hat{g}(\omega). \quad (1190)$$

Donde \hat{g} es dada por

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}e^{-|\omega|} \quad (1191)$$

según (898). De esta manera, reemplazando en la primera ecuación vemos que \hat{f} satisface

$$\omega \cdot \hat{f}(\omega) = D(e^{-|\omega|}) = -\operatorname{sgn}(\omega)e^{-|\omega|}. \quad (1192)$$

Ahora, si continuamos con los cálculos sin prestar mucha atención a la naturaleza distribucional de \hat{f} podríamos cerrar el caso de inmediato pasando a ω al otro lado de la igualdad según,

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{\operatorname{sgn}(\omega)e^{-|\omega|}}{\omega} = -\frac{e^{-|\omega|}}{|\omega|}. \quad (1193)$$

Sin embargo, esto no es del todo correcto. Si tomó su debido tiempo en **S.16** seguramente se habrá dado cuenta de que, no solo

$$\omega \cdot \hat{f}(\omega) = -\operatorname{sgn}(\omega)e^{-|\omega|} \quad (1194)$$

sino que también

$$\omega \cdot (\hat{f}(\omega) + c\delta(\omega)) = -\operatorname{sgn}(\omega)e^{-|\omega|}, \quad (1195)$$

puesto que $\omega \cdot \delta(\omega) = 0$, en el sentido distribucional. Es importante que siempre tenga presente esta clase de detalles al calcular transformadas distribucionales. En el mundo de las distribuciones, y por más extraño que parezca, puede suceder que $a \cdot b = 0$, aunque ni a ni b sean cero. No son números reales o complejos, son distribuciones, y deben ser tratadas como tal. Incorporando entonces el factor adicional, obtenemos que

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{e^{-|\omega|}}{|\omega|} + c\delta(\omega) \quad (1196)$$

para algún valor c apropiado. La última pieza del rompecabezas necesaria para determinar a c , tal y como sucedió en **S.16**, es que \hat{f} satisfaga la definición de la transformada distribucional.

D.4.B

Sea $g \in S(\mathbb{R})$ y considere

$$\langle \hat{f} | g \rangle = c \langle \delta | g \rangle - \left\langle \frac{e^{-|x|}}{|x|} | g \right\rangle = c \langle \delta | g \rangle - \langle |x|^{-1} | g(x)e^{-|x|} \rangle. \quad (1197)$$

Tomando la definición para $|x|^{-1}$ dada en (160), esta distribución actúa sobre $g(x)e^{-|x|}$ según

$$\langle |x|^{-1} | g(x)e^{-|x|} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)e^{-|x|} - H(1-|x|)g(0)}{|x|} dx. \quad (1198)$$

Antes de seguir con los cálculos, es importante que comprenda la motivación tras esta definición aparentemente tan extraña. Naturalmente, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{|x|} dx \quad (1199)$$

sufre de una incómoda singularidad en $x = 0$, así como pasa con x^{-1} . Sin embargo, a través de un proceso de regularización es posible recuperar un valor para la integral. El valor recuperado *no es* el valor de la integral en el sentido original; sin duda podemos afirmar que ésta diverge. No obstante, el valor *asignado* a través de la regularización puede hacerse *consistente* con el resto de nuestros cálculos para obtener resultados *consistentes*. Por ejemplo, en **S.16** regularizamos la distribución x^{-1} usando su valor principal de Cauchy y luego hicimos a dicha regularización consistente con la transformada de Fourier determinando a la constante c de forma apropiada. Aquí procederemos exactamente de la misma forma, solo que la regularización empleada es distinta pues el valor principal de Cauchy de $|x|^{-1}$ no elimina del todo la singularidad en $x = 0$. Nuestra regularización para $|x|^{-1}$ es dada precisamente por (160). Procedamos ahora con los cálculos: podemos eliminar los valores absolutos de x separando la integral en dos partes,

$$\int_0^{\infty} \frac{g(x)e^{-x} - H(1-x)g(0)}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{g(x)e^{-(-x)} - H(1-(-x))g(0)}{-x} dx \quad (1200)$$

y de aquí que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)e^{-|x|} - H(1-|x|)g(0)}{|x|} dx = \int_0^{\infty} \frac{(g(x) + g(-x))e^{-x} - 2H(1-x)g(0)}{x} dx. \quad (1201)$$

Como

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{i\omega x} d\omega, \quad (1202)$$

entonces

$$g(x) + g(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) (e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot 2 \operatorname{Re} (e^{i\omega x}) d\omega. \quad (1203)$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\omega) [2 \operatorname{Re} (e^{i\omega x}) e^{-x} - 2H(1-x)]}{x} d\omega dx. \quad (1204)$$

Manipulando un poco la expresión,

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\omega x} e^{-x} - H(1-x)}{x} \right\} d\omega dx, \quad (1205)$$

y luego el fuerte decrecimiento de ambas funciones nos permite cambiar el orden de integración y escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x} dx \right\} d\omega. \quad (1206)$$

De esta manera, vemos que

$$\langle \hat{f} | g \rangle = c \langle \delta | g \rangle - \left\langle \frac{e^{-|x|}}{|x|} | g \right\rangle = c \langle \delta | g \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x} dx \right\} d\omega \quad (1207)$$

D.4.C

Concentrémonos ahora en la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x} dx. \quad (1208)$$

Mediante la introducción de un término regulador ϵ podemos calcular la integral auxiliar

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x^{1-\epsilon}} dx \quad (1209)$$

y luego recuperar el valor deseado tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Precisamente,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x^{1-\epsilon}} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x}}{x^{1-\epsilon}} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx. \quad (1210)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x}}{x^{1-\epsilon}} dx - \frac{1}{\epsilon} \quad (1211)$$

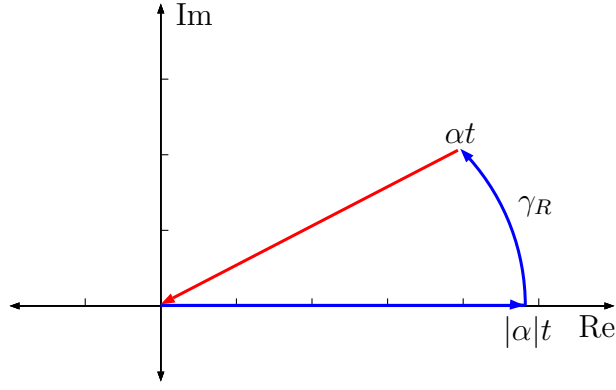
La integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(1-i\omega)x}}{x^{1-\epsilon}} dx = \int_0^{\infty} x^{\epsilon-1} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha = 1 - i\omega, \quad (1212)$$

puede evaluarse tomando el cambio $u = \alpha x$, obteniendo así

$$\frac{1}{\alpha^\epsilon} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha t} u^{\epsilon-1} e^{-u} du = \frac{1}{(1-i\omega)^\epsilon} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha t} u^{\epsilon-1} e^{-u} du. \quad (1213)$$

El cambio que introdujimos remueve la dificultad de la exponencial compleja, transformando la forma del integrando a algo de tipo $\Gamma(\epsilon)$, pero añade una *nueva* dificultad porque ahora el camino de integración no es sobre la recta real sino sobre una línea diagonal en el plano complejo que cruza el origen. No obstante, esto puede ser remediado empleando nuestros conocimientos de integración de contorno (nuevamente, espero que no haya olvidado Matemáticas VI). Considere un camino en forma de cuña circular dado por



Note que $\psi(u) = u^{\epsilon-1}e^{-u}$ es analítica en la región contenida por el camino y, por tanto, su integral sobre este debe anularse en virtud del teorema integral de Cauchy. Así,

$$\int_0^{|\alpha|t} \psi(u) du + \int_{\gamma_R} \psi(u) du = \int_0^{\alpha t} \psi(u) du. \quad (1214)$$

Tal y como hemos hecho en ejercicios anteriores, puede mostrarse mediante la desigualdad ML que la integral sobre el segmento circular

$$\int_{\gamma_R} \psi(u) du \quad (1215)$$

tiende a cero a medida que $R = |\alpha|t \rightarrow \infty$, siempre que $\text{Re}(\alpha) > 0$. De esta manera,

$$\frac{1}{(1-i\omega)^\epsilon} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha t} u^{\epsilon-1} e^{-u} du = \frac{1}{(1-i\omega)^\epsilon} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{|\alpha|t} u^{\epsilon-1} e^{-u} du \quad (1216)$$

$$= \frac{1}{(1-i\omega)^\epsilon} \int_0^\infty u^{\epsilon-1} e^{-u} du. \quad (1217)$$

Por ende

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(1-i\omega)x}}{x^{1-\epsilon}} dx = \frac{\Gamma(\epsilon)}{(1-i\omega)^\epsilon}, \quad (1218)$$

y reemplazando en (1211)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x^{1-\epsilon}} dx = \frac{\Gamma(\epsilon)}{(1-i\omega)^\epsilon} - \frac{1}{\epsilon}. \quad (1219)$$

Ahora solo queda tomar $\epsilon \rightarrow 0$ y es en este último paso que sale a la luz la utilidad del término regulador ϵ . Usando la información del enunciado, es posible escribir la serie de Laurent de (1218) alrededor de $\epsilon = 0$ como

$$\frac{\Gamma(\epsilon)}{(1-i\omega)^\epsilon} = \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \left(\frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\zeta(2)}{2} \right) \epsilon + \dots \right] \left[1 - \ln(1-i\omega)\epsilon + \frac{1}{2} \ln^2(1-i\omega)\epsilon^2 + \dots \right] \quad (1220)$$

$$= \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln(1-i\omega) + \left(\frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\zeta(2)}{2} + \gamma \ln(1-i\omega) + \frac{1}{2} \ln^2(1-i\omega) \right) \epsilon + \dots \quad (1221)$$

de forma que

$$\frac{\Gamma(\epsilon)}{(1-i\omega)^\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} = -\gamma - \ln(1-i\omega) + \left(\frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\zeta(2)}{2} + \gamma \ln(1-i\omega) + \frac{1}{2} \ln^2(1-i\omega) \right) \epsilon + \dots \quad (1222)$$

Luego, tomando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(1-i\omega)x} - H(1-x)}{x} dx = -\gamma - \ln(1-i\omega) \quad (1223)$$

Tal y como advertimos, el término regulador ϵ nos permitió trabajar al margen de las singularidades aparentes para poder encontrar el valor de la integral. Retomando con los cálculos de la transformada distribucional, vea que

$$2 \operatorname{Re}(-\gamma - \ln(1 - i\omega)) = -2\gamma - \ln(1 + \omega^2) \quad (1224)$$

y por consiguiente

$$\langle \hat{f} | g \rangle = c \langle \delta | g \rangle + 2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + \omega^2) \hat{g}(\omega) d\omega. \quad (1225)$$

Pero

$$2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) d\omega = 2\gamma \langle \delta | g \rangle, \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + \omega^2) \hat{g}(\omega) d\omega = \langle f | \hat{g} \rangle, \quad (1226)$$

y como la definición de la transformada distribucional requiere

$$\langle \hat{f} | g \rangle = \langle f | \hat{g} \rangle, \quad (1227)$$

se sigue que

$$c \langle \delta | g \rangle + 2\gamma \langle \delta | g \rangle + \langle f | \hat{g} \rangle = \langle f | \hat{g} \rangle. \quad (1228)$$

Finalmente, para satisfacer la igualdad

$$c = -2\gamma \quad (1229)$$

y, después de un arduo trabajo, obtenemos

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{e^{-|\omega|}}{|\omega|} - 2\gamma\delta(\omega). \quad (1230)$$

E.1.A

Siguiendo la definición de las transformadas, vea como la transformada seno es dada por

$$\hat{f}^s(\omega) = i(\hat{f}(\omega) - \hat{f}(-\omega)) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \quad (1231)$$

y de forma similar, la transformada coseno se expresa

$$\hat{f}^c = \hat{f}(\omega) + \hat{f}(-\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx. \quad (1232)$$

E.1.B

A partir de las definiciones es posible expresar a la transformada de Fourier usual en términos de las transformadas seno y coseno. En efecto, dado que

$$\hat{f}^c - i\hat{f}^s = 2\hat{f}, \quad (1233)$$

entonces se sigue que

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} (\hat{f}^c(\omega) - i\hat{f}^s(\omega)). \quad (1234)$$

E.1.C

Asumiendo que $\hat{f} \in L^1$ podemos recuperar a f usando la transformada inversa de Fourier según

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (1235)$$

No obstante, y en vista de (1234),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}^c(\omega) - i\hat{f}^s(\omega)) (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) d\omega. \quad (1236)$$

Ahora, puesto que \hat{f}^c y \hat{f}^s son funciones par e impar respectivamente, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^c(\omega) \sin(\omega x) d\omega = 0, \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^s(\omega) \cos(\omega x) d\omega = 0. \quad (1237)$$

Por ende,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^c(\omega) \cos(\omega x) d\omega + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^s(\omega) \sin(\omega x) d\omega. \quad (1238)$$

Finalmente, como ambos integrandos son funciones pares podemos absorber el factor 1/2 y afirmar el resultado deseado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \int_0^{\infty} \hat{f}^c(\omega) \cos(\omega x) d\omega + \int_0^{\infty} \hat{f}^s(\omega) \sin(\omega x) d\omega. \quad (1239)$$

E.2.A

Por más notorio que sea el resultado y por más intimidante que parezca, el principio de incertidumbre no es otra cosa que un uso astuto de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si bien esto aún no es claro, no se preocupe. Por el momento, considere

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1240)$$

Primero, no es difícil ver que

$$\sigma^2(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx. \quad (1241)$$

Por otro lado, note como

$$\omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 = |\omega \hat{f}(\omega)|^2. \quad (1242)$$

Así, recordando la propiedad (870) podemos afirmar que

$$|\omega \hat{f}(\omega)|^2 = |\mathfrak{F}(Df)(\omega)|^2. \quad (1243)$$

Entonces, empleando el teorema de Plancherel en sentido inverso

$$\sigma^2(\psi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}(Df)(\omega)|^2 d\omega \quad (1244)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |Df(x)|^2 dx. \quad (1245)$$

Juntando ambos resultados obtenemos la igualdad deseada,

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |Df(x)|^2 dx. \quad (1246)$$

E.2.B

En el contexto de los espacios vectoriales con producto interno, la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle. \quad (1247)$$

para dos vectores u, v . Y a pesar de que hasta ahora no hemos declarado estar trabajando formalmente sobre elementos de un espacio vectorial en particular, el resultado sigue siendo válido a efectos de nuestros cálculos. Basta con argumentar que f pertenece a una clase de funciones apropiada (en términos de integrabilidad), y que tal clase forma un espacio vectorial. De esta manera, siguiendo la definición (175)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |Df(x)|^2 dx = \langle xf(x), xf(x) \rangle \langle Df, Df \rangle \quad (1248)$$

y por ende

$$\langle Df, Df \rangle \langle xf(x), xf(x) \rangle \geq |\langle Df(x), xf(x) \rangle|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} \cdot Df(x) dx \right|^2. \quad (1249)$$

Así,

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |Df(x)|^2 dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} \cdot Df(x) dx \right|^2. \quad (1250)$$

Emplear la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permitió acotar el producto $\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi)$ según la expresión anterior. No obstante, este producto puede acotarse aún más usando la siguiente observación. Dado que $|z| \geq \operatorname{Re}(z)$, y como consecuencia

$$|z|^2 \geq \operatorname{Re}(z)^2, \quad (1251)$$

se sigue que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} \cdot Df(x) dx \right|^2 \geq \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} \cdot Df(x) dx \right]^2. \quad (1252)$$

Ahora, como la integración sucede sobre \mathbb{R} podemos afirmar que

$$\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} \cdot Df(x) dx \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{Re} [\overline{f(x)} \cdot Df(x)] dx. \quad (1253)$$

Recordando que $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, podemos reescribir el término dentro de la integral según

$$\frac{1}{2} [\overline{f(x)} \cdot Df(x) + f(x) \cdot \overline{Df(x)}]. \quad (1254)$$

Llegado este punto es importante hacer una observación crucial: al comenzar, partimos de la suposición de que f es una función de números reales a (posiblemente) complejos. Esto significa que cuando hablamos de Df , la derivada correspondiente **no es** una derivada compleja, sino la usual. Sin las restricciones impuestas por las ecuaciones de Cauchy-Riemann para poner en duda la diferenciabilidad de la conjugación, sucede que

$$\overline{Df} = D\bar{f}. \quad (1255)$$

Como consecuencia,

$$\bar{f} \cdot Df + f \cdot D\bar{f} = D(f \cdot \bar{f}) = D(|f|^2). \quad (1256)$$

Sustituyendo en la expresión original, obtenemos la cota citada en el enunciado:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} \cdot Df(x) dx \right|^2 \geq \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x D(|f(x)|^2) dx \right)^2, \quad (1257)$$

y de aquí que

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) \geq \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x D(|f(x)|^2) dx \right)^2. \quad (1258)$$

E.2.C

Por último, solo queda analizar con cuidado la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} xD(|f(x)|^2) dx. \quad (1259)$$

Empleando integración por partes, vea que

$$D(x|f(x)|^2) = |f(x)|^2 + xD(|f(x)|^2), \quad (1260)$$

y así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xD(|f(x)|^2) dx = x|f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (1261)$$

Evaluando ambos términos, note que la integral de la derecha ya es conocida pues desde un principio se había asumido que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1. \quad (1262)$$

Por otra parte, el rápido decrecimiento de la función f nos permite asegurar que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x|f(x)|^2 = 0 \quad (1263)$$

y como consecuencia

$$x|f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (1264)$$

Sustituyendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xD(|f(x)|^2) dx = -1 \quad (1265)$$

y, finalmente, reemplazando el valor en (1258) obtenemos la desigualdad de Heisenberg

$$\sigma^2(\phi) \sigma^2(\psi) \geq \frac{1}{4}. \quad (1266)$$

Tal y como hemos advertido, el nombre *principio de incertidumbre* resulta un poco engañoso. Ciertamente no es un principio en el sentido de que se origina de forma axiomática, pero esto no lo hace menos fundamental. Siempre que existan variables conjugadas (es decir, vinculadas entre sí a través de una transformada de Fourier) estas naturalmente satisfarán cotas similares. Y si bien esta desigualdad es famosa por su aplicación en el contexto de la mecánica cuántica, otros dominios exhiben también esta misma propiedad: existe un límite *teórico* sobre qué tan chico puede ser el producto de las variancias de dos variables conjugadas. Esto es un hecho absoluto y totalmente *matemático*.

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

T.1

Ahora que tenemos el poder de la transformada de Fourier en nuestras manos, somos capaces de transformar ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas a nuestra voluntad. En efecto, observe como aplicando la transformada de Fourier obtenemos

$$\mathfrak{F}(D^2u + k^2u) = -\omega^2\hat{u} + k^2\hat{u} = 0, \quad (1267)$$

y de aquí que \hat{u} satisface

$$\omega^2\hat{u}(\omega) = k^2\hat{u}(\omega). \quad (1268)$$

En circunstancias donde \hat{u} estuviese obligada a ser una transformada de Fourier en el sentido clásico, la ecuación no tendría solución alguna. Sin embargo, esta es una restricción completa arbitraria y \hat{u} bien puede ser una transformada de Fourier distribucional. Con esta nueva mentalidad para abordar la ecuación, vea como

$$\omega^2\delta(\omega - k) = k^2\delta(\omega - k), \quad \text{y} \quad \omega^2\delta(\omega + k) = k^2\delta(\omega + k) \quad (1269)$$

son soluciones perfectamente válidas en un contexto distribucional. Así, la transformada \hat{u} deseada no es más que una combinación lineal de ambas soluciones:

$$\hat{u}(\omega) = c_1\delta(\omega - k) + c_2\delta(\omega + k). \quad (1270)$$

Finalmente, transformando de vuelta al dominio de partida obtenemos la solución general del oscilador armónico en forma exponencial, tal y como la habríamos obtenido empleando métodos de Matemáticas IV, en virtud de (978) y (958).

$$u(x) = c_1e^{ikx} + c_2e^{-ikx}. \quad (1271)$$

T.2

Siguiendo exactamente el mismo patrón que en el ejercicio anterior, note como al aplicar la transformada de Fourier obtenemos

$$-\omega^2\hat{f}(\omega) + i\omega\lambda\hat{f}(\omega) + \eta\hat{f}(\omega) = 0 \quad (1272)$$

y luego, reescribiendo un poco la ecuación,

$$(\omega^2 - i\omega\lambda - \eta)\hat{f}(\omega) = 0. \quad (1273)$$

Una vez factorizada la expresión cuadrática en ω según

$$\left[\omega - \left(\frac{i\lambda}{2} + \frac{\Delta}{2}\right)\right] \left[\omega - \left(\frac{i\lambda}{2} - \frac{\Delta}{2}\right)\right] \quad (1274)$$

con

$$\Delta = \sqrt{4\eta - \lambda^2} \quad (1275)$$

nuevamente vemos como la delta de Dirac puede servirnos para construir soluciones a (1273) de la misma manera en la que nos sirvió en el ejercicio pasado: a partir de

$$\left[\omega - \left(\frac{i\lambda}{2} + \frac{\Delta}{2} \right) \right] \left[\omega - \left(\frac{i\lambda}{2} - \frac{\Delta}{2} \right) \right] \hat{f}(\omega) = 0 \quad (1276)$$

podemos deducir que

$$\hat{f}(\omega) = c_1 \delta \left(\omega - \left(\frac{i\lambda}{2} + \frac{\Delta}{2} \right) \right) + c_2 \delta \left(\omega - \left(\frac{i\lambda}{2} - \frac{\Delta}{2} \right) \right). \quad (1277)$$

Tomando la transformada inversa y aplicando (958) otra vez,

$$f(x) = e^{-\lambda x/2} (c_1 e^{i\Delta x/2} + c_2 e^{-i\Delta x/2}). \quad (1278)$$

Esta es precisamente la solución general a la ecuación del oscilador armónico amortiguado, que es lo que deseábamos obtener. Éste método distribucional para resolver ecuaciones diferenciales a través de la transformada de Fourier es muy potente, no solo por su capacidad de transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, sino además por su aplicabilidad a un rango tan amplio de funciones. Como todas las cosas en la vida, naturalmente tiene sus limitaciones. Sin embargo, luego veremos que es de particular utilidad en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales y cómo desempeña un papel fundamental en el cálculo de núcleos integrales.

S.1.A

Sobre dominios de extensión infinita, como suele suceder en ciertas aproximaciones de física, el método convencional de la separación de variables y la expansión en autofunciones no siempre es viable. En capítulos anteriores sucedía con frecuencia que el dominio de solución para la ecuación diferencial se encontraba acotado en una u otra dirección, y eso nos permitía utilizar nuestro conocimiento sobre series de Fourier para ajustar a condiciones de frontera arbitrarias. Ahora que el dominio es infinito en ambas direcciones (recta real completa en x , y una semirrecta infinita en la dirección de t) no podemos seguir ciegamente tal procedimiento. Sin embargo, cuando una puerta se cierra otra se abre, y es la transformada de Fourier la herramienta que nos presenta un nuevo camino para resolver esta clase de problemas.

Considere la ecuación en cuestión,

$$\partial_t u - \alpha \partial_x^2 u = 0, \quad \alpha > 0. \quad (1279)$$

Aplicando la transformada de Fourier respecto a x ,

$$\mathfrak{F}(\partial_t u) - \alpha \mathfrak{F}(\partial_x^2 u) = \mathfrak{F}(\partial_t u) + \alpha \omega^2 \mathfrak{F}(u) = 0. \quad (1280)$$

La transformada de Fourier de la derivada temporal de u puede simplificarse observando que, tal y como lo indica la regla integral de Leibniz, es posible intercambiar el orden de la derivación parcial y la integración. Es decir,

$$\mathfrak{F}(\partial_t u) = \partial_t \mathfrak{F}(u). \quad (1281)$$

De esta manera, y definiendo $\hat{u}(\omega, t) = \mathfrak{F}(u)$, la ecuación original se transforma según

$$\partial_t \hat{u}(\omega, t) + \alpha \omega^2 \hat{u}(\omega, t) = 0. \quad (1282)$$

Note cómo tras haber aplicado la transformada de Fourier hemos reducido (1279) a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en t . No solo eso, sino que ahora esta ecuación puede resolverse de manera directa, pues es precisamente la ecuación diferencial de la función exponencial. Así,

$$\hat{u}(\omega, t) = \phi(\omega) e^{-\alpha \omega^2 t} \quad (1283)$$

donde ϕ es una constante respecto a t , pero posiblemente una función arbitraria respecto a ω . La forma particular de $\phi(\omega)$ puede determinarse evaluando a \hat{u} para $t = 0$, pues

$$\hat{u}(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (1284)$$

y por tanto

$$\hat{u}(\omega, 0) = \phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (1285)$$

Finalmente, empleando la transformada inversa de Fourier, la solución u es dada por

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega, \quad \text{donde } \phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (1286)$$

Tome un segundo para apreciar la manera en que la transformada de Fourier nos permitió casi trivializar la ecuación de calor. Este es solo uno de muchos motivos para aprender a dominar la transformada de Fourier y su teoría subyacente; en casi todos los campos de la ciencia, la destreza en el análisis de Fourier es recompensada con resultados elegantes una y otra vez.

S.1.B

Volvamos al producto

$$\hat{u}(\omega, t) = \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t}. \quad (1287)$$

En vez de proceder directamente con la transformada inversa de Fourier, también habría sido posible reconocer que este producto de funciones en el dominio de frecuencias puede escribirse como la convolución de dos funciones sobre la variable espacial x , en virtud de (909). De esta manera, si

$$\phi(\omega) = \hat{f}(\omega), \quad \text{y} \quad \hat{g}(\omega, t) = e^{-\alpha\omega^2 t} \quad (1288)$$

entonces

$$u = \left(\frac{1}{2\pi} g * f \right), \quad (1289)$$

donde la convolución se realiza sobre la variable x . Definiendo

$$K = \frac{1}{2\pi} g, \quad (1290)$$

claramente podemos ver que u tiene la forma indicada en el enunciado, pues $u = K * f$. La función g , correspondiente a \hat{g} , ya ha sido calculada con anterioridad. Recordando (1113), se sigue que $K(x, t)$ es dada por

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}. \quad (1291)$$

Este es el famoso *núcleo de calor*. Para ciertas aplicaciones, la convolución en términos del núcleo de calor es mucho más práctica que la solución en forma integral y de aquí su gran utilidad. En el siguiente ejercicio verá como emplear el núcleo de calor permite obtener una solución a la ecuación de calor de forma directa, casi sin cálculo alguno.

S.1.C

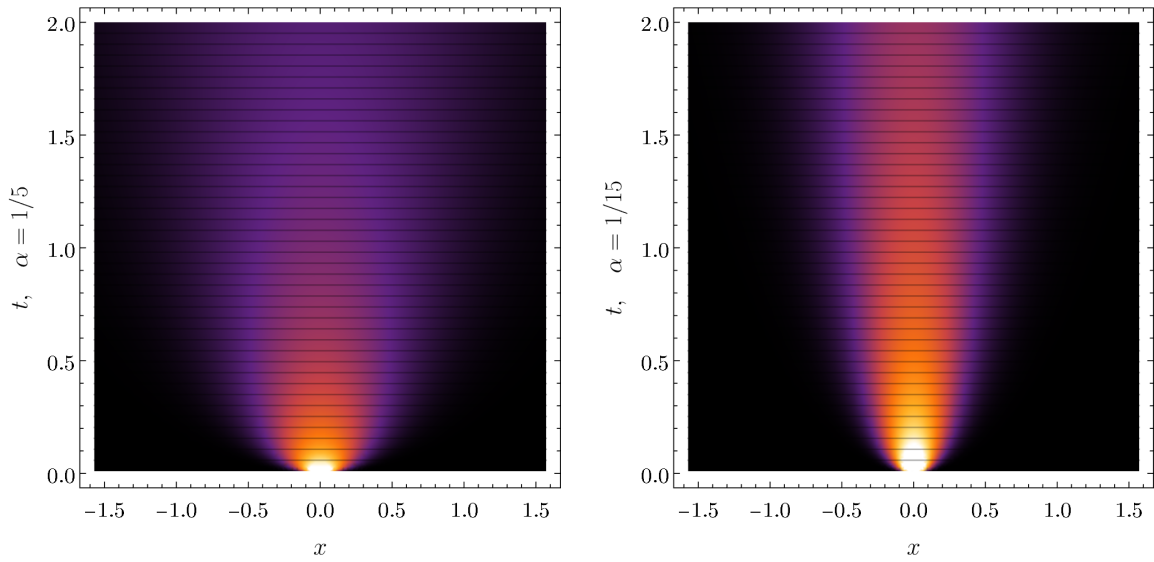
Si tomamos $f(x) = \delta(x)$, entonces podemos hallar a u de inmediato substituyendo a f en la solución del núcleo de calor. En efecto,

$$u(x, t) = (K * \delta)(x, t) = K(x, t) \quad (1292)$$

de manera que la solución deseada es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}. \quad (1293)$$

A continuación se muestran mapas de calor de $u(x, t)$ para $\alpha = 1/5$ y $\alpha = 1/25$.



Una vez más verificamos que incluso en el caso de una barra *infinita* a mayor difusividad térmica más rápidamente cambia la temperatura de la barra, partiendo desde el perfil original $\delta(x)$.

S.2.A

La demostración de estas propiedades sigue exactamente el mismo camino que las correspondientes para la transformada de Fourier vistas en (870) y (874). En efecto, vea que

$$D\mathfrak{F}^c(f)(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_{\omega} \cos(\omega t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) \sin(\omega t) dt = -\mathfrak{F}^s(t f(t))(\omega), \quad (1294)$$

y de forma similar

$$D\mathfrak{F}^s(f)(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_{\omega} \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) \cos(\omega t) dt = \mathfrak{F}^c(t f(t))(\omega) \quad (1295)$$

en virtud de la regla integral de Leibniz.

S.2.B

Nuevamente, las propiedades pueden deducirse empleando el mismo procedimiento usado para la transformada de Fourier: como

$$D(f(t) \cos(\omega t)) = Df(t) \cos(\omega t) - \omega f(t) \sin(\omega t), \quad (1296)$$

entonces integrando por partes obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} Df(t) \cos(\omega t) dt = f(t) \cos(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (1297)$$

$$= \omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (1298)$$

puesto que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0. \quad (1299)$$

Así,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Df(t) \cos(\omega t) dt = \omega \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (1300)$$

y por tanto

$$\mathfrak{F}^c(Df)(\omega) = \omega \cdot \mathfrak{F}^s(f)(\omega). \quad (1301)$$

La prueba para el caso de la transformada Seno es idéntica salvo un cambio de signo. La omitiremos para ahorrar en escritura.

S.3.A

A partir de las definiciones puede obtenerse de inmediato que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right) \quad (1302)$$

y como consecuencia

$$\mathfrak{F}(f) = \frac{1}{2} (\mathfrak{F}^c(f) - i \cdot \mathfrak{F}^s(f)). \quad (1303)$$

De esta manera, observe que si f es par entonces $\mathfrak{F}^s(f) = 0$, y

$$\mathfrak{F}(f) = \frac{1}{2} \mathfrak{F}^c(f). \quad (1304)$$

En cambio, si f fuese impar entonces tendríamos $\mathfrak{F}^c(f) = 0$ y

$$\mathfrak{F}(f) = -\frac{i}{2} \mathfrak{F}^s(f). \quad (1305)$$

En otras palabras, para funciones pares o impares la transformada de Fourier puede expresarse únicamente en términos de la transformada Coseno o la transformada Seno, respectivamente.

S.3.B

Por el mismo hecho de ser pares (y asumiendo diferenciabilidad), tales funciones *siempre* tienen derivada nula en $x = 0$. Esto puede verse de manera cuantitativa notando que

$$f(-x) = f(x) \implies f'(-x) = -f'(x) \quad (1306)$$

y por ende $f'(0) = 0$, pues $f'(0)$ debe ser su propio negativo. Por el contrario, las funciones impares no poseen esta restricción. Un contraejemplo muy común es la función seno, cuya derivada es 1 para $x = 0$.

S.4.A

Siguiendo los cálculos de la forma general, podemos escribir de inmediato una solución g empleando la transformada de Fourier, pues ya es conocido que

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega. \quad (1307)$$

donde $\phi = \mathfrak{F}(f)$, $f(x) = g(x, 0)$. Sin embargo, debemos atender a un pequeño detalle. Si el problema solo indica que la solución deseada ha de estar definida para $x > 0$, entonces es posible que la condición de borde únicamente se encuentre definida sobre la semirrecta $[0, \infty)$. Bajo tales circunstancias, no necesariamente es lícito calcular

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad (1308)$$

dado que $f(x)$ no se encuentra definida sobre $(-\infty, 0)$. La solución a este problema aparente, tal y como sucedió con las series de Fourier en (342), es encontrar una extensión de f que nos permita obtener una solución para g sobre $(0, \infty)$ empleando métodos que requieren funciones definidas sobre $(-\infty, \infty)$. Así, definamos a f^* como la extensión par de $f(x) = g(x, 0)$,

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (1309)$$

Con esto en mano, podemos calcular sin problemas $\phi = \mathfrak{F}(f^*)$ y luego evaluar la solución general. Aunque es arbitraria nuestra decisión de definir una extensión de f , nos vemos obligados a tomar la extensión *par* debido a las condiciones de borde sobre $\partial_x g$. Para comprender por qué, vea lo siguiente: Como f^* es par (por definición), entonces

$$\phi = \mathfrak{F}(f^*) = \frac{1}{2} \mathfrak{F}^c(f^*) \quad (1310)$$

en virtud de (1304). Además, como la transformada Coseno *también* es par por definición, se sigue que

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \cos(\omega x) d\omega \quad (1311)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \cos(\omega x) d\omega. \quad (1312)$$

Pero

$$2\phi(\omega) = \mathfrak{F}^c(f^*)(\omega) \quad (1313)$$

y por tanto obtenemos una fórmula para g que puede evaluarse *sin salir del dominio de solución*, pues

$$g(x, t) = \int_0^{\infty} \psi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \cos(\omega x) d\omega, \quad (1314)$$

donde

$$\psi(\omega) = \mathfrak{F}^c(f^*)(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx. \quad (1315)$$

No solo eso, sino que también podemos verificar que nuestra solución satisface $\partial_x g(0, t) = 0$. La integral

$$\int_0^{\infty} \psi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \cos(\omega x) d\omega \quad (1316)$$

es par respecto a x y su derivada parcial respecto a x se anula para $x = 0$, tal y como dedujimos en (1306). Ahora vemos por qué la extensión debió ser par y no impar: la paridad escogida para f^* determina la paridad de ψ , y como consecuencia también la paridad de la transformada inversa. De esta manera, g es solución de la EDP y además satisface ambas condiciones de frontera pues

$$g(x, 0) = \int_0^{\infty} \psi(\omega) \cos(\omega x) d\omega \quad (1317)$$

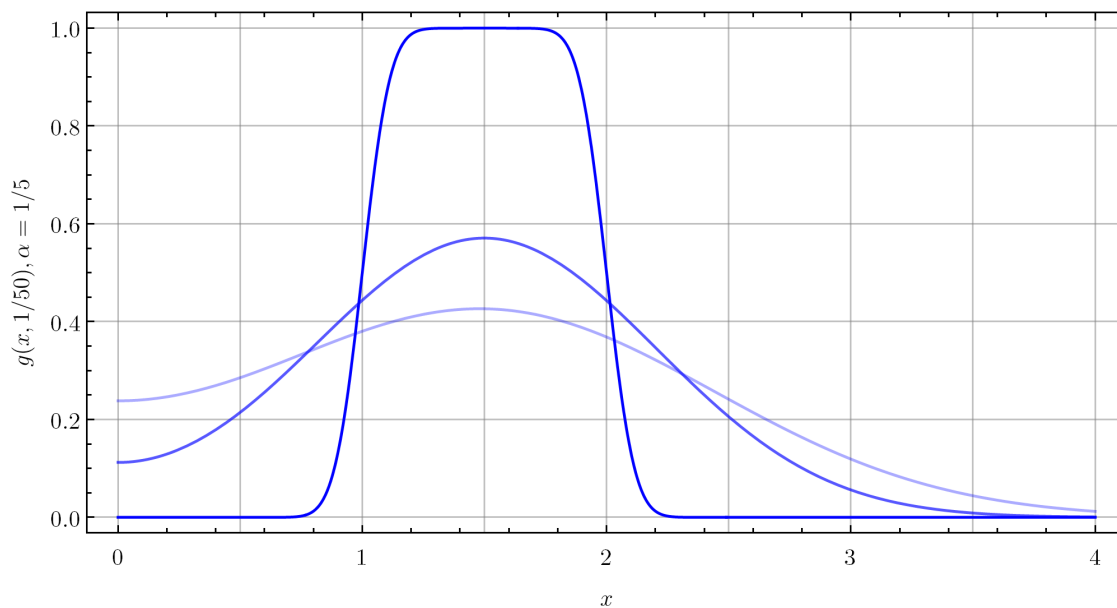
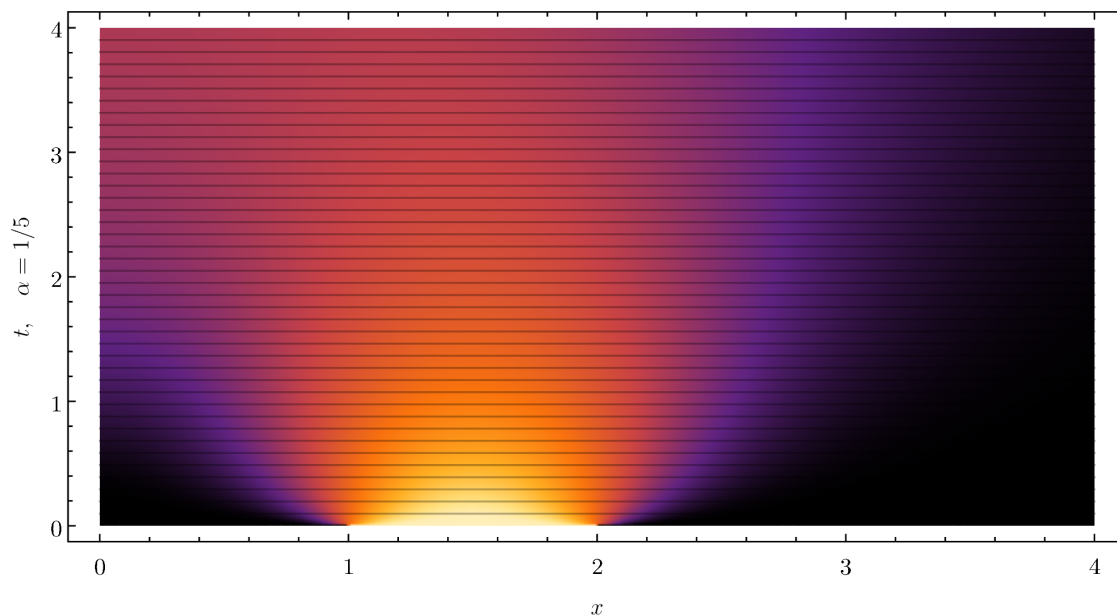
en virtud de la fórmula de inversión (168), y

$$\partial_x g(0, t) = 0 \quad (1318)$$

gracias a la paridad de la transformada inversa. Sustituyendo las funciones particulares del enunciado, la solución g del problema en cuestión es dada por

$$g(x, t) = \int_0^{\infty} \psi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \cos(\omega x) d\omega, \quad \psi(\omega) = \frac{2}{\pi\omega} (\sin(2\omega) - \sin(\omega)). \quad (1319)$$

A continuación se muestran dos gráficas de la solución $g(x, t)$ para $\alpha = 1/5$. La primera, un mapa de calor, y la segunda un gráfico donde podemos observar la evolución del perfil en más detalle partiendo desde $g(x, 1/50)$.



Note la característica dilatación del perfil de temperatura, tal y como hemos visto en ejercicios anteriores. Sin embargo, observe también como la ausencia de transferencia de calor sobre la frontera $x = 0$, debido a la condición $\partial_x g(0, t) = 0$, hace que la energía térmica se acumule en el extremo izquierdo de la barra en vez de disiparse como sucede en la región a la derecha del pulso inicial. Si se pregunta por qué las gráficas parten desde $t = 1/50$ y no $t = 0$, la respuesta es que evaluar numéricamente las integrales correspondientes se vuelve más y más complicado a medida que $t \rightarrow 0$; evaluar a partir de $t = 1/50$ es simplemente una cuestión de conveniencia.

S.4.B

Siguiendo exactamente el mismo patrón del caso anterior, definiendo a f^* como la extensión *impar* de f podemos construir una solución que solo requiere integraciones sobre $(0, \infty)$ y además satisface $g(0, t) = 0$. En efecto, volviendo a la solución general vemos que

$$\phi(\omega) = -\frac{i}{2} \mathfrak{F}^s(f^*). \quad (1320)$$

Luego, dado que la transformada Seno es *impar*,

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \cdot i \sin(\omega x) d\omega \quad (1321)$$

$$= 2i \int_0^{\infty} \phi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \sin(\omega x) d\omega. \quad (1322)$$

Pero como $2i\phi(\omega) = \mathfrak{F}^s(f^*)$ entonces obtenemos una solución casi idéntica al caso anterior, solo que esta vez la transformada correspondiente es la transformada Seno. Así,

$$g(x, t) = \int_0^{\infty} \psi(\omega) e^{-\alpha\omega^2 t} \sin(\omega x) d\omega, \quad \text{con } \psi(\omega) = \mathfrak{F}^s(f^*) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx. \quad (1323)$$

Nuevamente, sustituyendo las condiciones de frontera del enunciado, la solución particular es dada por la expresión anterior donde

$$\psi(\omega) = \frac{2}{\pi\omega} (\cos(\omega) - \cos(2\omega)). \quad (1324)$$

Finalmente, no olvide que la solución satisface la condición de frontera $g(0, t) = 0$, en vista de que $\sin(0) = 0$.

S.5

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que f tiene una transformada de Fourier \hat{f} en el sentido clásico. Así, si E_f es algún valor finito entonces podemos asegurar que $f \in L^2$ y por consiguiente el teorema de Plancherel nos permite afirmar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1325)$$

Como $\hat{f} = 0$ para $|\omega| \geq \pi$ entonces es posible escribir una serie de Fourier para la extensión 2π -periódica de \hat{f} según

$$\hat{f}(\omega) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega}, \quad (1326)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{-in\omega} d\omega. \quad (1327)$$

Ahora, note que

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega, \quad (1328)$$

en virtud de (197). Pero esta es precisamente la transformada inversa de Fourier de \hat{f} , de manera que

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} f(n), \quad (1329)$$

y como consecuencia

$$\hat{f}(\omega) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n) e^{in\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega}. \quad (1330)$$

Usando el mismo argumento, vea que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1331)$$

Luego, aplicando el teorema de Parseval a la integral del miembro derecho,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2, \quad (1332)$$

y finalmente, sustituyendo en la expresión,

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2. \quad (1333)$$

Más allá de su veracidad matemática, este resultado deja ver una conexión fascinante: la energía asociada a una señal f de banda limitada (definida según (198)) puede determinarse a partir de una infinita pero discreta cantidad de muestras de f .

S.6.A

Al igual que el caso de la ecuación de calor, nuestros cálculos comienzan a partir de la transformada de Fourier de la ecuación de Laplace, específicamente sobre la variable x cuya extensión es todo \mathbb{R} :

$$\mathfrak{F}(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = -\omega^2 \hat{u} + \partial_y^2 \hat{u} = 0. \quad (1334)$$

De aquí obtenemos una ecuación diferencial bastante familiar. En particular,

$$\partial_y^2 \hat{u}(\omega, y) - \omega^2 \hat{u}(\omega, y) = 0. \quad (1335)$$

La solución general a esta ecuación diferencial ordinaria, ampliamente conocida desde Matemáticas IV y utilizada en el método de separación de variables, es dada por

$$\hat{u}(\omega, y) = \phi_1(\omega)e^{-\omega y} + \phi_2(\omega)e^{\omega y} \quad (1336)$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son constantes respecto a y pero funciones arbitrarias de ω . Ahora, la condición de que la solución debe ser acotada sobre y trae al escenario una dificultad incómoda. Si bien $\omega^2 \geq 0$ y $y > 0$, ω por sí sola puede tener cualquier signo, y esto significa que la solución (1336) debe cambiar de forma acorde. Es decir, si $\omega \geq 0$, entonces \hat{u} debe ser de la forma

$$\phi_1(\omega)e^{-\omega y}, \quad (1337)$$

mientras que si $\omega < 0$, ha de ser tener la forma

$$\phi_2(\omega)e^{\omega y}. \quad (1338)$$

No obstante, es posible combinar ambos casos y afirmar

$$\hat{u}(\omega, y) = \phi(\omega)e^{-|\omega|y}, \quad (1339)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 han sido reemplazadas por una única función en vista de que $\hat{u}(\omega, 0)$ debe ser continua en $\omega = 0$, y por tanto $\phi_1(\omega) = \phi_2(\omega)$. De hecho, y al igual que para el caso de la ecuación de calor,

$$\hat{u}(\omega, 0) = \phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) \quad (1340)$$

en virtud de la condición de borde impuesta. Finalmente, aplicando la transformada inversa de Fourier podemos recuperar a u como

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega. \quad (1341)$$

Una vez más, la transformada de Fourier y su enorme alcance nos provee con herramientas y el formalismo suficiente para convertir ecuaciones diferenciales nada triviales en problemas muchísimo más simples.

S.6.B

Volviendo a (1339), y empleando el mismo razonamiento que para el caso de la ecuación de calor, este producto de funciones sobre el dominio de frecuencias puede escribirse como la convolución de dos funciones sobre la variable x según (909). En efecto, $u = K * f$ donde

$$\hat{K}(\omega, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-|\omega|y}. \quad (1342)$$

Afortunadamente, ya hemos encontrado anteriormente una función cuya transformada de Fourier posee precisamente esta forma. Recordando (898) y aplicando las propiedades de escalado, obtenemos

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad y > 0. \quad (1343)$$

Este núcleo integral es conocido como el Núcleo de Poisson para el semiplano superior. Si esto de los núcleos integrales aún no le convence, en el siguiente ejercicio verá su gran utilidad en problemas concretos.

S.6.C

Calculando a fuerza bruta la transformada de Fourier de $f(x)$ y sustituyendo en la solución general (1341) podemos obtener rápidamente la integral

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega. \quad (1344)$$

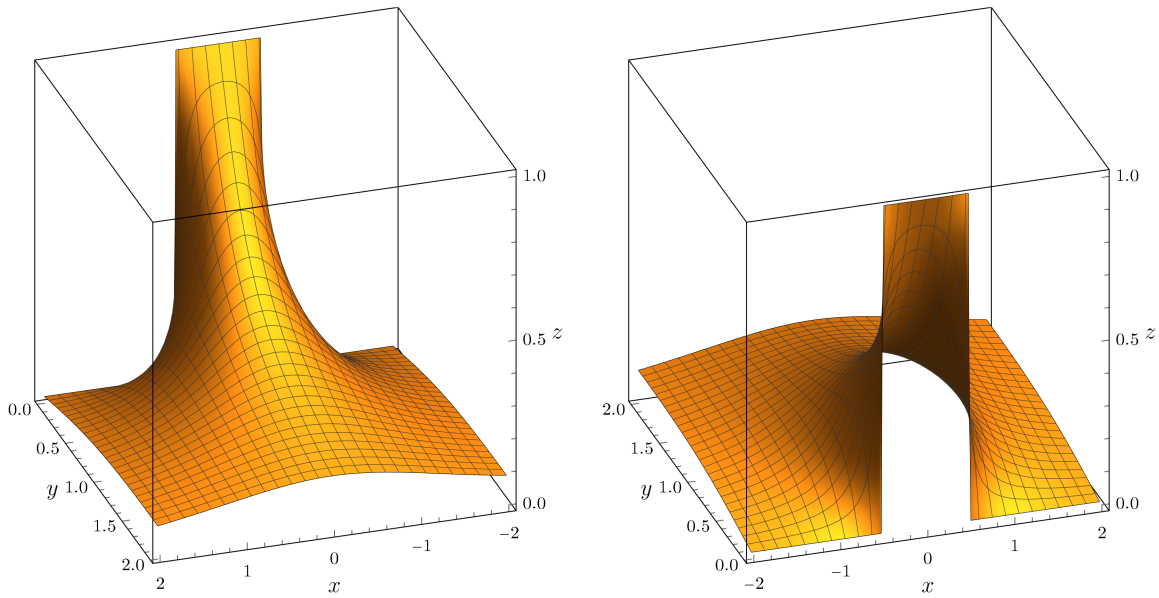
Y si bien esta es una solución perfectamente válida, es posible calcular una forma mucho más concisa empleando el núcleo de Poisson para el semiplano superior. Note como

$$u(x, y) = (K * f)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + s^2} \cdot \chi_{[-1/2, 1/2]}(x - s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{x-1/2}^{x+1/2} \frac{y}{y^2 + s^2} ds. \quad (1345)$$

Curiosamente, esta es la ampliamente conocida integral de la tangente inversa. Por tanto

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{2x+1}{2y}\right) - \arctan\left(\frac{2x-1}{2y}\right) \right]. \quad (1346)$$

No es difícil ver que esta forma para u es muchísimo más fácil de interpretar que (1344). Además de ahorrarnos tener que calcular la transformada de Fourier de f , el núcleo de Poisson nos provee con una expresión cerrada para u . No es un mero artilugio matemático; el núcleo de Poisson es una herramienta que le servirá en su carrera e incluso en un examen parcial. A continuación se muestran gráficas de $z = u(x, y)$.



S.7.A

Tomando cada transformada de Fourier como una transformada distribucional podemos extender automáticamente la solución genérica (1341). En efecto, y descartando la representación integral,

$$u(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}(\phi(\omega)e^{-|\omega|y})(x), \quad \text{donde} \quad \phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) \quad (1347)$$

es la solución deseada. Así,

$$\phi(\omega) = \mathfrak{F}(c)(\omega) = c\delta(\omega) \quad (1348)$$

y como consecuencia

$$u(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}(c\delta(\omega)e^{-|\omega|y})(x) = \mathfrak{F}^{-1}(c\delta(\omega))(x) = c. \quad (1349)$$

Vea como la función determinada satisface tanto $\nabla^2 u = 0$ como $u(x, 0) = c$. De esta manera, y a través de la noción distribucional de la transformada de Fourier, podemos obtener soluciones constantes que si bien en los cálculos son completamente plausibles, no tienen cabida en el rígido marco de la noción clásica para la transformada.

S.7.B

De forma similar, si reemplazamos a c por $\text{sinc}(x)$ también es posible obtener una solución, pues

$$\phi(\omega) = \mathfrak{F}(\text{sinc}(x))(\omega) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(\omega) \quad (1350)$$

en virtud de (1021), y luego

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\mathfrak{F}^{-1}(\chi_{[-1,1]}(\omega)e^{-|\omega|y})(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{-|\omega|y}e^{i\omega x}d\omega. \quad (1351)$$

Esta integral puede efectuarse directamente notando que

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{-|\omega|y}e^{i\omega x}d\omega = \int_0^1 e^{-\omega y}\cos(\omega x)d\omega \quad (1352)$$

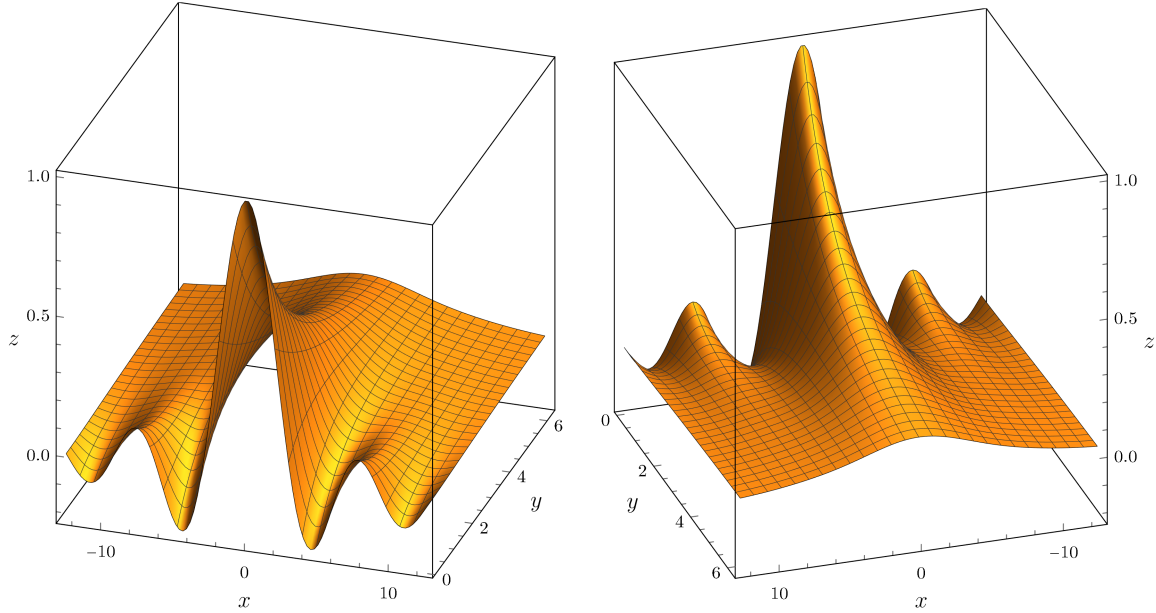
es una integral notable, donde

$$\int e^{az} \cos(bz) dz = \frac{e^{az}(b \sin(bz) + a \cos(bz))}{a^2 + b^2} + C, \quad a, b, C \in \mathbb{R} \quad (1353)$$

Por tanto, evaluando entre los límites de integración obtenemos

$$u(x, y) = \frac{y + e^{-y}(x \sin(x) - y \cos(x))}{y^2 + x^2}. \quad (1354)$$

Si tiene la más mínima duda de si esta es realmente una solución válida, tómese su tiempo y confirme que $\nabla^2 u = 0$, $u(x, 0) = \text{sinc}(x)$. A continuación se muestran gráficas de $z = u(x, y)$ definida según (1354).



S.8

Al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación de Laplace, siguiendo exactamente el mismo procedimiento de (1334), vemos que

$$\hat{u}(\omega, y) = \phi_1(\omega)e^{-\omega y} + \phi_2(\omega)e^{\omega y}. \quad (1355)$$

En aquel entonces, la única forma de mantener a la solución acotada fue requerir que $|\hat{u}| \rightarrow 0$ a medida que $y \rightarrow 0$. Como ahora el dominio en y es acotado esta restricción no tiene sentido. Además de esta pequeña dificultad, enfrentamos también un problema común en la separación de variables, donde no es posible simplemente requerir que la porción separable en y equivalga 1 en ambas fronteras pues la transformada de Fourier solo nos permite ajustar a una de las *dos* condiciones de borde. Nuevamente estamos ante la pregunta de cómo ajustar una función a dos condiciones de borde aparentemente imposibles de conciliar, y nuevamente la respuesta yace en emplear la estrategia de (691): construir *dos* soluciones, cada una ajustando a su condición de borde respectiva, y proponer su suma como solución al problema general. Así, considere dos problemas auxiliares

$$\nabla^2 u_1 = 0, \quad u_1(x, 0) = f(x), \quad u_1(x, H) = 0 \quad (1356)$$

y

$$\nabla^2 u_2 = 0, \quad u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, H) = g(x). \quad (1357)$$

Nuestro objetivo será determinar cada una de estas soluciones para luego combinarlas, tal y como hicimos en la sección de EDPs.

Comencemos por u_1 y volvamos a (1355). Por mera conveniencia, reescribamos a \hat{u}_1 según la forma alternativa para las soluciones de (1335)

$$\hat{u}_1(\omega, y) = \phi(\omega) (c_1 \sinh(\omega y) + c_2 \cosh(\omega y)). \quad (1358)$$

Esta expresión resulta muy familiar. En nuestros cálculos de separación de variables, formas similares aparecían con mucha frecuencia. Siguiendo el mismo orden de ideas que para separación de variables, podemos tomar que el factor entre paréntesis valga 1 para $y = 0$, y 0 para $y = H$. Sustituyendo los valores y despejando las constantes, obtenemos que

$$\hat{u}_1(\omega, y) = \phi(\omega) [\cosh(\omega y) - \coth(\omega H) \sinh(\omega y)]. \quad (1359)$$

De esta manera, u_1 es recuperada tomando la transformada inversa de Fourier,

$$u_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\cosh(\omega y) - \coth(\omega H) \sinh(\omega y)] \phi(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega). \quad (1360)$$

Note como, a pesar de tener un carácter exponencial, la expresión $\cosh(\omega y) - \coth(\omega H) \sinh(\omega y)$ se mantiene acotada para $0 \leq y \leq H$ y la integral puede efectuarse sin preocuparse por alguna divergencia exponencial. La prueba de esto se deja como un ejercicio al lector. Procediendo de forma idéntica para u_2 , pero requiriendo que el factor exponencial se anule para $y = 0$ y valga 1 en $y = H$, podemos afirmar que

$$\hat{u}_2(\omega, y) = \psi(\omega) \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega H)}, \quad (1361)$$

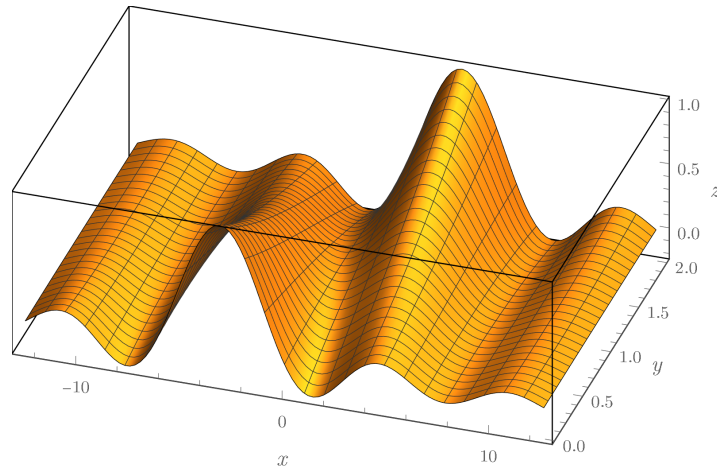
de donde obtenemos a u_2 según

$$u_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega H)} \psi(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \psi(\omega) = \mathfrak{F}(g)(\omega). \quad (1362)$$

Finalmente, y juntando ambos resultados,

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\cosh(\omega y) - \coth(\omega H) \sinh(\omega y)] \phi(\omega) e^{i\omega x} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega H)} \psi(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (1363)$$

donde $\phi(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega)$, $\psi(\omega) = \mathfrak{F}(g)(\omega)$. Así construida, u satisface tanto $\nabla^2 u = 0$ sobre $0 < y < H$ como $u(x, 0) = f(x)$, $u(x, H) = g(x)$. A continuación se muestran gráficas para $z = u(x, y)$ con $f(x) = \text{sinc}(x + \pi)$, $g(x) = \text{sinc}(x - \pi)$ y $H = 2$, solo en caso de que los resultados no le convengan aún.



Si estos cálculos le recuerdan al método de separación de variables, le felicito. Lo que acabamos de hacer es, en cierto sentido, una separación de variables.

S.9.A

Aplicando las fórmulas deducidas en (261), podemos escribir la serie de Fourier $2L$ -periódica de \hat{f} en forma exponencial directamente como

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n\pi/L}, \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{-i\omega n\pi/L} d\omega. \quad (1364)$$

Sin embargo, y siguiendo un argumento similar al de (1328), observe como

$$c_{-n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{i\omega n\pi/L} d\omega = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega n\pi/L} d\omega = \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \quad (1365)$$

puesto que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq L$. Así,

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{i\omega n\pi/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\omega n\pi/L} \quad (1366)$$

S.9.B

Para recuperar a f partiendo de (1366) basta con tomar la transformada inversa de Fourier, pues

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-L}^L e^{i\omega t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\omega n\pi/L} d\omega. \quad (1367)$$

Ahora, es posible intercambiar la sumatoria con el signo integral según

$$\int_{-L}^L e^{i\omega t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\omega n\pi/L} d\omega = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \int_{-L}^L e^{i\omega t} e^{-i\omega n\pi/L} d\omega. \quad (1368)$$

debido a que la sumatoria converge a \hat{f} , en el sentido de la norma L^2 sobre $[-L, L]$, y la integración es (salvo ciertas constantes) el producto interno entre esta sumatoria y la función $e^{i\omega t}$. Así, efectuando la integral obtenemos

$$\int_{-L}^L e^{i\omega t} e^{-i\omega n\pi/L} d\omega = \frac{2L \sin(n\pi - Lt)}{n\pi - Lt} = 2L \operatorname{sinc}(n\pi - Lt). \quad (1369)$$

Finalmente, reemplazando en (1368) obtenemos el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \operatorname{sinc}(n\pi - Lt). \quad (1370)$$

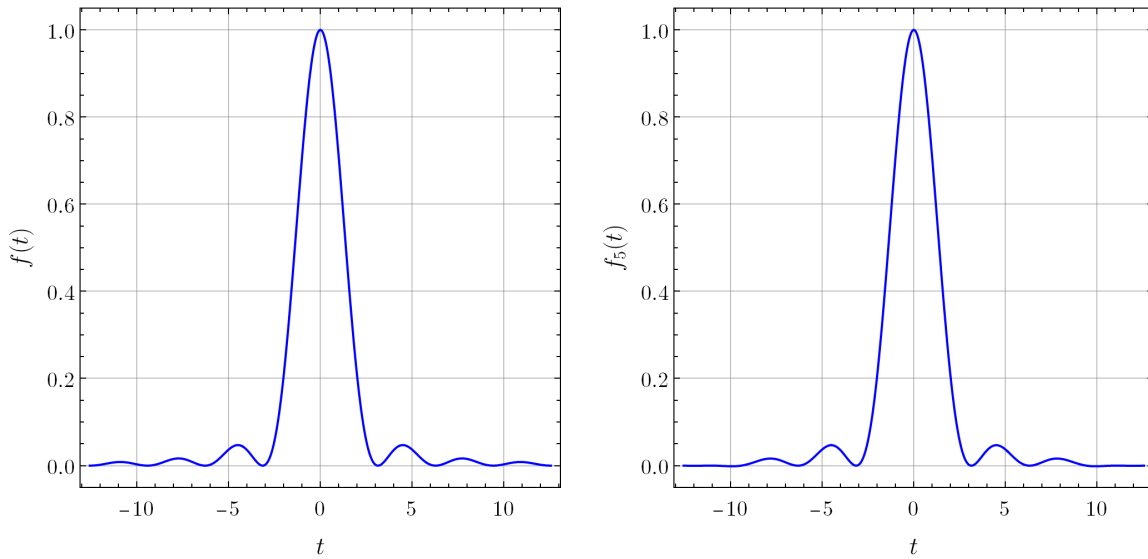
Esta fórmula también es conocida como la fórmula de interpolación de Whittaker-Shannon. Como ejemplo práctico, considere la función

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2. \quad (1371)$$

La transformada de Fourier de esta función es un pulso triangular centrado en $x = 0$, soportado en $[-2, 2]$ y de altura $1/2$. Por ende, f es de banda limitada con $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 2$ y el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon afirma que f puede reconstruirse a partir de muestras de f sobre $n\pi/2$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. A continuación se muestran gráficas de f y su aproximación

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \operatorname{sinc}(n\pi - Lt) \quad (1372)$$

para $N = 5$.



Como puede observar, incluso a $N = 5$ ambas gráficas son virtualmente indistinguibles entre sí. Solo una inspección para x muy grande revela las diferencias entre la función original y la aproximación mediante la fórmula de interpolación. Aunque en aplicaciones de la vida real la fórmula (1372) es un tanto inconveniente por la lenta convergencia de la función sinc, este ejemplo ilustra la real efectividad de la fórmula de interpolación.

D.1.A

De forma similar a los ejercicios anteriores, aplicando la transformada de Fourier directamente a la ecuación de calor no homogénea podemos convertir el problema en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden según

$$\partial_t \hat{u}(\omega, t) + \alpha \omega^2 \hat{u}(\omega, t) = \psi(\omega, t), \quad \psi = \mathfrak{F}(f). \quad (1373)$$

Sin embargo, esta clase de ecuaciones poseen una solución conocida. En efecto, \hat{u} puede determinarse empleando exactamente la misma fórmula que utilizamos para el caso sobre un intervalo acotado en (771), donde la condición inicial es determinada por $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{g}(\omega)$. Así,

$$\hat{u}(\omega, t) = \phi(\omega) e^{-\alpha \omega^2 t} + e^{-\alpha \omega^2 t} \int_0^t e^{\alpha \omega^2 \mu} \psi(\omega, \mu) d\mu, \quad \phi = \mathfrak{F}(g). \quad (1374)$$

Esto no es más que el resultado de sustituir los valores correspondientes en la solución general para una EDO lineal, no homogénea y de primer orden. Si no está familiarizado con esta fórmula, consulte su bibliografía de Matemáticas IV.

D.1.B

Siguiendo el mismo patrón que los ejercicios anteriores, quisiéramos poder aplicar la transformada inversa de Fourier a (1374) y afirmar la solución. No obstante, a pesar de que el término en ϕ tiene una transformada inversa expresable como

$$(K_t * g)(x, t) \quad (1375)$$

según lo indica (1289), el término de la derecha requiere un poco más de trabajo. Para proceder, note que

$$e^{-\alpha \omega^2 t} \int_0^t e^{\alpha \omega^2 \mu} \psi(\omega, \mu) d\mu = \int_0^t e^{-\alpha \omega^2 (t-\mu)} \psi(\omega, \mu) d\mu. \quad (1376)$$

De esta manera, el único paso que falta para determinar a u es encontrar la transformada inversa de la integral anterior,

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\int_0^t e^{-\alpha\omega^2(t-\mu)} \psi(\omega, \mu) d\mu \right). \quad (1377)$$

Para evaluar esta transformada inversa nos será útil explorar una situación muy similar pero más simple. Suponga que desea encontrar la transformada inversa de una integral de tipo

$$\hat{H}(\omega, t) = \int_0^t \hat{\eta}(\omega, s) ds, \quad (1378)$$

donde ω es la variable en el dominio de frecuencias, y considere

$$H = \mathfrak{F}^{-1} \left(\int_0^t \hat{\eta}(\omega, s) ds \right), \quad H' = \int_0^t \mathfrak{F}^{-1}(\hat{\eta})(x, s) ds. \quad (1379)$$

A partir de la primera igualdad es posible deducir que

$$\partial_t \hat{H} = \hat{\eta}(\omega, t), \quad (1380)$$

en virtud del primer teorema fundamental del cálculo. Pero de forma similar

$$\partial_t H' = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{\eta})(x, t) \implies \mathfrak{F}(\partial_t H') = \hat{\eta}(\omega, t), \quad (1381)$$

y de aquí que

$$\mathfrak{F}(\partial_t H') = \partial_t \hat{H}' = \hat{\eta}(\omega, t), \quad (1382)$$

puesto que la derivación parcial (respecto a una variable distinta a la usada para la transformación) y la transformada de Fourier conmutan entre sí. Entonces, comparando (1380) y (1382) obtenemos que \hat{H} y \hat{H}' son idénticas salvo una constante aditiva:

$$\hat{H} = \hat{H}' + c. \quad (1383)$$

Tomando la transformada de Fourier distribucional de H' directamente a partir de su definición y comparando con (1378) es posible verificar que la constante aditiva (posiblemente una función de ω , pues la derivación es respecto a t) es precisamente 0. Así, $H = H'$ y por ende

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\int_0^t \hat{\eta}(\omega, s) ds \right) = \int_0^t \mathfrak{F}^{-1}(\hat{\eta})(x, s) ds. \quad (1384)$$

En nuestro caso particular,

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\int_0^t e^{-\alpha\omega^2(t-\mu)} \psi(\omega, \mu) d\mu \right) = \int_0^t \mathfrak{F}^{-1} \left(e^{-\alpha\omega^2(t-\mu)} \psi(\omega, t) \right) (x, \mu) d\mu. \quad (1385)$$

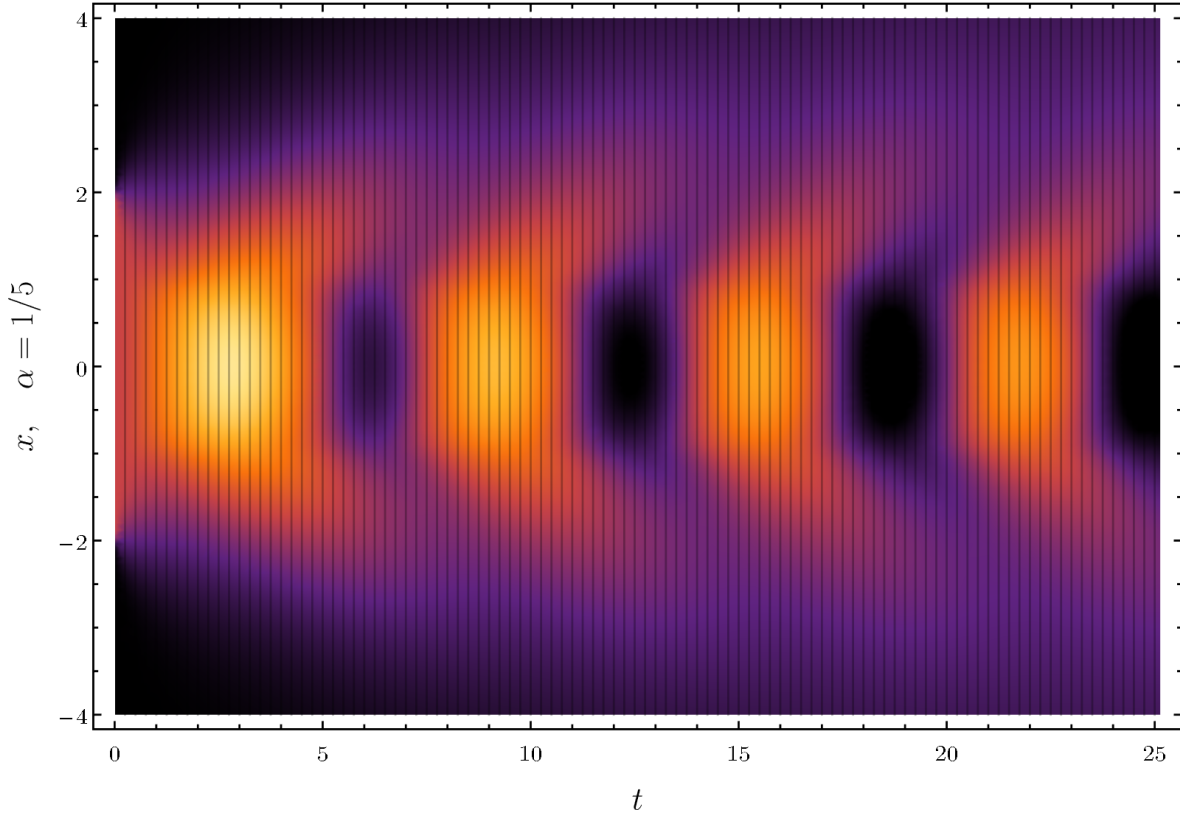
Pero esta transformada inversa dentro del signo integral es de la misma forma que calculamos en (1375); en el dominio de frecuencias es el producto de la transformada del núcleo de calor evaluado en $(\omega, t - \mu)$ y la transformada de f , y justamente este producto puede escribirse como una convolución según (1375). Reemplazando la transformada inversa por la convolución correspondiente,

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\int_0^t e^{-\alpha\omega^2(t-\mu)} \psi(\omega, \mu) d\mu \right) = \int_0^t (K_{t-\mu} * f)(x, \mu) d\mu \quad (1386)$$

y finalmente, juntando todos los resultados, la solución u a la ecuación de calor no homogénea es dada por

$$u(x, t) = (K_t * g)(x, t) + \int_0^t (K_{t-\mu} * f)(x, \mu) d\mu. \quad (1387)$$

Si bien esta deducción sigue una buena parte del procedimiento para el caso sobre un dominio acotado, ciertamente no fue del todo trivial. Como recompensa por su arduo trabajo, a continuación se muestra un mapa de calor de $u(x, t)$ para $g(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$, $f(x, t) = \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(t)$, con $\alpha = 1/5$.



D.2.A

Para verificar que

$$\partial_t^2 u = c^2 \nabla^2 u \quad (1388)$$

basta con evaluar las derivadas parciales correspondientes. Primero, note como

$$\partial_t^2 u = \partial_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (1389)$$

en virtud de la regla integral de Leibniz. Por otra parte,

$$c^2 \partial_x^2 u = c^2 \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = -k^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (1390)$$

Así, comparando las últimas dos expresiones obtenemos que

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad (1391)$$

y por tanto vemos que $\omega = kc$ es compatible con la ecuación de onda según (1388).

D.2.B

Aunque la situación para la ecuación de Schrödinger es ligeramente distinta los cálculos a efectuar son idénticos. Evaluando el miembro izquierdo de la igualdad (219),

$$-i\hbar \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = -\hbar\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (1392)$$

Luego,

$$\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = -\frac{k^2 \hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (1393)$$

Finalmente, comparando ambas expresiones la relación de dispersión para la ecuación de Schrödinger de una partícula libre es dada por

$$\omega = \frac{k^2 \hbar}{2m}. \quad (1394)$$

Observe como, a diferencia de la relación de dispersión obtenida para la ecuación de onda, ésta es cuadrática en el número de onda k en vez de ser lineal. Como regla general, siempre que la relación de dispersión **no sea** lineal respecto al número de onda los paquetes de onda se deforman al propagarse. En cambio, los paquetes de onda cuya relación de dispersión es lineal respecto a k viajan sin deformación alguna. Seguramente habrá notado esto en los ejercicios sobre la ecuación de onda en la sección de EDP; como acabamos de ver, la relación de dispersión de sus soluciones es lineal y por tanto éstas mantienen su forma.

D.2.C

Con esta información en mano, podemos encontrar una solución a la ecuación de Schrödinger directamente, pues

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} e^{ik_0 x} \quad (1395)$$

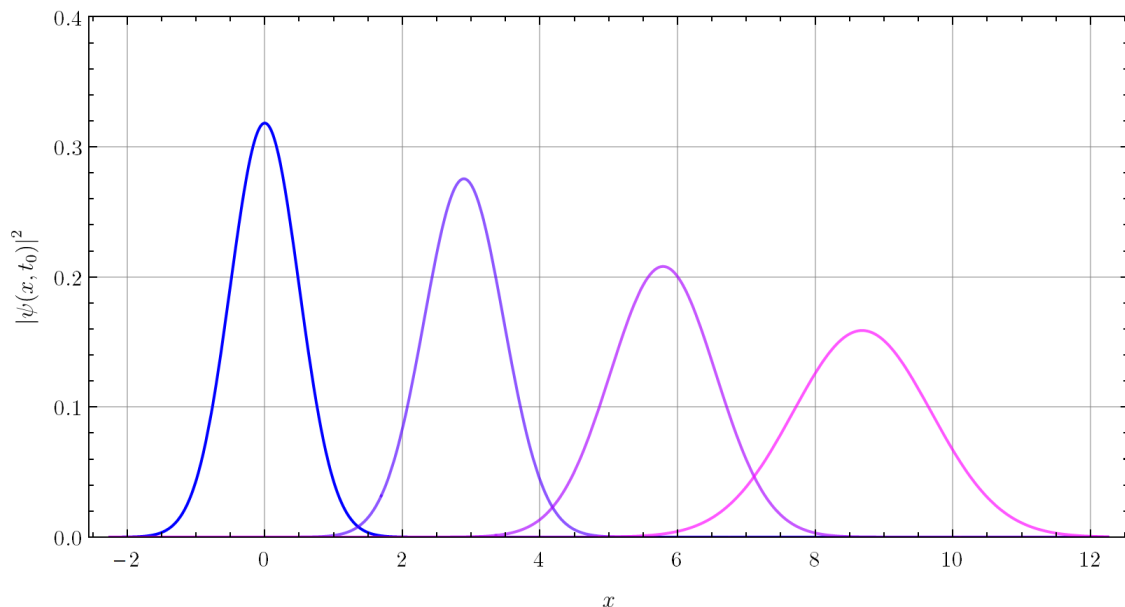
naturalmente implica que $\hat{\phi}$ es la transformada de Fourier de $\psi(x, 0)$. Afortunadamente, la transformada de e^{-x^2} ya ha sido calculada anteriormente. Así, usando (1113) y empleando las propiedades de la transformada de Fourier,

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{2\pi} e^{-(k-k_0)^2/4}. \quad (1396)$$

De esta manera, la solución deseada ψ es dada según

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/4} e^{i(kx - \omega t)} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/4} e^{-i\hbar k^2 t/2m} e^{ikx} dk. \quad (1397)$$

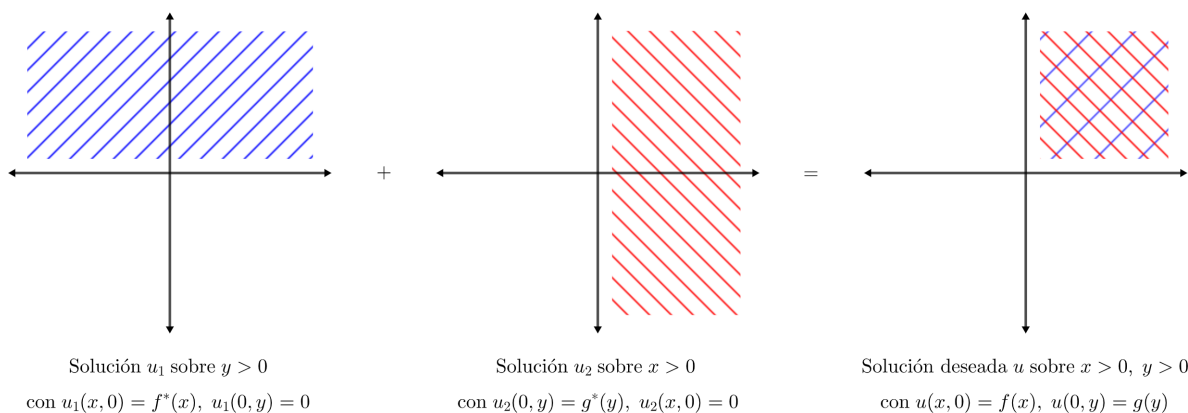
Siguiendo la discusión del ejercicio anterior, y con intención de ilustrar la deformación del pulso inicial a medida que se propaga por el espacio, a continuación se muestra una secuencia de gráficas de $|\psi(x, t_0)|^2$ con $k_0 = 10$ y $m = m_e$, donde m_e es la masa de un electrón en reposo, para sucesivos valores de t_0 .



D.3.A

Antes de intentar un procedimiento a fuerza bruta usando la transformada de Fourier, tome un momento para observar lo siguiente. En ejercicios anteriores encontramos una solución general a la ecuación de Laplace sobre el semiplano $y > 0$. Y si bien nuestro problema particular no sucede sobre un semiplano, intuitivamente puede pensar en el dominio $y > 0$, $x > 0$ como un *medio* semiplano. En efecto, si no tuviésemos condición alguna sobre $y = 0$ podríamos afirmar directamente una solución usando este razonamiento: tomando a f^* como la extensión impar de f y usándola como condición de frontera al problema del semiplano, la solución obtenida también sería solución sobre el medio semiplano $x > 0$, $y > 0$ (es decir, el primer cuadrante).

Sin embargo, aquí debemos incorporar también una condición de frontera $u(0, y)$ pues el problema lo requiere. Pero ahora podemos repetir exactamente el mismo análisis sobre el semiplano $x > 0$. De esta forma, separando el problema original en dos problemas auxiliares para los semiplanos $y > 0$ y $x > 0$, podemos obtener una solución juntando las soluciones a los problemas auxiliares. En esencia, la estrategia es la misma a la usada para (1356) y (691).



Así, considere los problemas auxiliares

$$\nabla^2 u_1 = 0, \quad u_1(x, 0) = f^*(x), \quad y > 0 \quad (1398)$$

y

$$\nabla^2 u_2 = 0, \quad u_2(0, y) = g^*(y), \quad x > 0 \quad (1399)$$

donde f^* y g^* son las extensiones impares de f y g respectivamente. Gracias a que ya encontramos la solución general para esta clase de problemas en (1341), podemos escribir las soluciones a cada uno directamente como

$$u_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega, \quad \phi = \mathfrak{F}(f^*) \quad (1400)$$

y

$$u_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-|\omega|x} e^{i\omega y} d\omega, \quad \psi = \mathfrak{F}(g^*). \quad (1401)$$

Juntando ambos resultados, la solución deseada u es dada por

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-|\omega|x} e^{i\omega y} d\omega \quad (1402)$$

sin tener que haber hecho ninguna cuenta a fuerza bruta ni transformaciones rebuscadas; solo fue necesaria una pizca de astucia. Si aún no le convence la solución indicada, le invito a verificar que, en efecto, $u(x, 0) = f(x)$ y $u(0, y) = g(y)$.

D.3.B

Una vez obtenida la solución general para el problema sobre el primer cuadrante, determinar a u para

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2n, 2n+1]}, \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2n+1, 2n+2]} \quad (1403)$$

es simplemente cuestión de encontrar las transformadas de Fourier apropiadamente. Ninguna de las dos funciones son integrables, así que naturalmente no poseen una transformada en el sentido clásico. Sin embargo, como hemos visto anteriormente, en el sentido distribucional es posible asignarles una transformada de Fourier. De esta manera, vea que las extensiones impares de f y g vienen dadas por

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2n, 2n+1]}(x) - \chi_{[-1-2n, -2n]}(x) \quad (1404)$$

y

$$g^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2n+1, 2n+2]}(y) - \chi_{[-2-2n, -1-2n]}(y) \quad (1405)$$

Para evaluar la transformada de f , observe que

$$\mathfrak{F}(f^*) = \mathfrak{F}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2n, 2n+1]} - \chi_{[-1-2n, -2n]}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}\left(\chi_{[2n, 2n+1]} - \chi_{[-1-2n, -2n]}\right). \quad (1406)$$

Este cambio en el orden de la transformada y la sumatoria es lícito debido a que $|f^*| \leq 1$. Puesto que

$$\langle 1 | \hat{T} \rangle \quad (1407)$$

converge para toda $T \in S(\mathbb{R})$ entonces el teorema de convergencia dominada asegura que el proceso límite de la sumatoria puede efectuarse luego de la integración, y como consecuencia

$$\mathfrak{F}(f^*)(\omega) = -\frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{4n+1}{2}\omega\right) = \phi(\omega) \quad (1408)$$

en virtud de (1012). De forma similar,

$$\mathfrak{F}(g^*)(\omega) = -\frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{4n+3}{2}\omega\right) = \psi(\omega). \quad (1409)$$

Con las transformadas en mano, podemos afirmar que la solución u resulta

$$u(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\omega|y} \phi(\omega)\right)(x) + \mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\omega|x} \psi(\omega)\right)(y). \quad (1410)$$

Sin embargo, esta forma puede reescribirse utilizando exactamente el mismo argumento que usamos para tomar la transformada de (1404) término a término, pero ahora con la transformada inversa. Así,

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\omega|y} \phi(\omega)\right)(x) = -\frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\omega|y} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{4n+1}{2}\omega\right)\right)(x). \quad (1411)$$

Como la función seno dentro de la transformada inversa puede descomponerse en exponenciales complejas, que luego derivarán en desplazamientos sobre el dominio espacial, concentrémonos en

$$-\frac{i}{\pi} \mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\omega|y} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)(x). \quad (1412)$$

Note como esta es casi exactamente la misma transformada inversa calculada en (1344). Usando este resultado, rápidamente obtenemos que

$$-\frac{i}{\pi} \mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\omega|y} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)(x) = -2i \cdot \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{2x+1}{2y}\right) - \arctan\left(\frac{2x-1}{2y}\right) \right]. \quad (1413)$$

Y por ende, definiendo

$$\eta(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{2x+1}{2y} \right) - \arctan \left(\frac{2x-1}{2y} \right) \right], \quad (1414)$$

la transformada inversa original resulta

$$-\frac{i}{\pi} \mathfrak{F}^{-1} \left(e^{-|\omega|y} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) \sin \left(\frac{4n+1}{2} \omega \right) \right) (x) = \eta \left(x - \frac{4n+1}{2}, y \right) - \eta \left(x + \frac{4n+1}{2}, y \right). \quad (1415)$$

De esta manera, sustituyendo de vuelta en (1411),

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(e^{-|\omega|y} \phi(\omega) \right) (x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(x - \frac{4n+1}{2}, y \right) - \eta \left(x + \frac{4n+1}{2}, y \right). \quad (1416)$$

Siguiendo un procedimiento idéntico para $e^{-|\omega|x} \psi(\omega)$, podemos calcular que

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(e^{-|\omega|x} \psi(\omega) \right) (y) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(y - \frac{4n+3}{2}, x \right) - \eta \left(y + \frac{4n+3}{2}, x \right), \quad (1417)$$

y finalmente

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(x - \frac{4n+1}{2}, y \right) - \eta \left(x + \frac{4n+1}{2}, y \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(y - \frac{4n+3}{2}, x \right) - \eta \left(y + \frac{4n+3}{2}, x \right). \quad (1418)$$

En retrospectiva, esta solución tiene un origen bastante intuitivo. Para (1344) determinamos una solución a la ecuación de Laplace donde la condición de frontera es un pulso rectangular, así que no es muy extraño que la solución en este caso sea una sumatoria de tales funciones. Aún así, una vez más esta solución nos recuerda que si bien la transformada de Fourier en el sentido clásico tiene una interpretación fenomenológica concreta, no es estrictamente necesaria desde un punto de vista matemático. La transformada distribucional comparte todas las propiedades importantes de la definición clásica, y través de ella es posible encontrar soluciones en situaciones similares con condiciones de borde aparentemente problemáticas. Para terminar, a continuación se muestran gráficas de $u(x, y)$ aproximada a $N = 10$ términos.

